

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Dinâmica de modelos cosmológicos e condições de inflação.

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
para obtenção do grau de Mestre em Física.

Tiago Gorjão Clara Charters d'Azevedo
1999

Índice

1	Introdução	1
2	Relatividade geral	7
2.1	As equações de campo para a gravitação	11
2.1.1	Equações de Einstein com matéria	11
2.1.2	Princípio variacional	13
2.1.3	A constante cosmológica	16
2.2	Modelos cosmológicos homogêneos	17
2.3	Propriedades gerais	18
2.3.1	Classificação de Bianchi	19
2.4	Equações de Einstein para os modelos cosmológicos homogêneos	21
3	Modelos cosmológicos e inflação	25
3.1	Modelos de FLRW	25
3.1.1	Comportamento qualitativo dos modelos de FLRW	29
3.1.2	O atrator de de Sitter	32
3.1.3	Inflação	34
4	Teorias escalares tensoriais	47
4.1	Equações das teorias escalares tensoriais	47
4.1.1	Princípio variacional para as teorias escalares tensoriais	48
4.2	Teorias escalares tensoriais como relatividade geral e um campo escalar	49
4.3	Modelos de FLRW nas teorias escalares tensoriais	50
4.3.1	Estudo local para um potencial arbitrário com um mínimo não nulo	52
4.3.2	A relatividade geral como atrator das teorias escalares tensoriais	56
4.3.3	Convergência para atrator de de Sitter	58
4.3.4	Conjectura do recolapso	61
4.3.5	Inflação nas teorias escalares tensoriais	63
5	Conclusão	67

A	Perturbações escalares da métrica de FLRW	69
A.1	Perturbações escalares da métrica de FLRW com $k = 0$ e um campo escalar	70
	Referências bibliográficas	73

Agradecimentos

Agradeço à Professora Ana Nunes e ao Professor José Pedro Mimoso pelo apoio e orientação que me proporcionaram ao longo da realização deste trabalho.

Agradeço também a todos os que me acompanharam durante a realização desta dissertação, em particular, à Laura e aos meus pais.

Finalmente agradeço ao Centro de Física Nuclear da Universidade de Lisboa pelas excelentes condições de trabalho que me disponibilizou.

Capítulo 1

Introdução

A cosmologia moderna teve o seu início com os modelos cosmológicos propostos por A. Einstein e W. de Sitter em 1917 baseados na teoria da relatividade geral. O conceito de um universo inflacionário foi introduzido por A. Friedmann e G. Lemaitre nos anos vinte tendo esta hipótese ganho mais credibilidade após a prova da instabilidade do universo estático de Einstein por Eddington e pelas observações astronómicas de Hubble (1920) do aumento do desvio para o vermelho com a distância das galáxias longínquas. A descoberta da radiação cósmica de fundo com temperatura $2.7277 \pm 0.0002\text{K}$ e com um espectro de corpo negro, com uma precisão de 0,005%, veio corroborar a ideia de que no início o universo deveria ter sido muito denso e com uma temperatura muito elevada. Não há, por isso, hoje, muitas dúvidas acerca da plausibilidade do modelo cosmológico do “big-bang” [TT99]. O conhecimento actual da evolução do universo pode ser muito bem descrito através do modelo cosmológico padrão que se baseia nas soluções isotrópicas e homogéneas da relatividade geral. O estado do universo é determinado pelo factor de escala global que reescala todas as distâncias físicas. A evolução do universo pode ser muito bem resumida e sistematizada em quatro épocas distintas [WE97].

A *época galáctica* corresponde ao período de tempo desde a formação de galáxias até hoje. Durante este período a matéria é modelada por partículas de um fluido perfeito sem interações, em que os aglomerados de galáxias, ou as próprias galáxias, são as partículas do fluido. A radiação cósmica de fundo tem pouca importância durante este período.

Na *época pré-galáctica* a matéria é modelada por um gás em que as partículas materiais que o constituem são, em períodos sucessivos, átomos, núcleos ou partículas elementares. Esta época é dividida em em duas partes: a *época pós-desacoplamento* na qual a matéria e a radiação evoluem independentemente uma da outra e uma época de *pré-desacoplamento* na qual a matéria se comporta como um gás ionizado que interage com a radiação. A radiação cósmica de fundo é interpretada como uma evidência observacional da época de pré-desacoplamento. A matéria domina assintoticamente nesta época mas a radiação de fundo, que

pode ser modelada por um gás relativista, domina inicialmente. A física destas épocas, galáctica e pré-galáctica, é bem conhecida. Ao contrário do dois períodos finais as épocas iniciais não são tão bem conhecidas apesar de serem intensivamente estudadas.

A *época inflacionária* durante a qual o universo sofreria um período de expansão acelerada não é tão bem conhecida. Para esta época, que ocorre antes da época pré-galáctica e depois do instante de Planck ($10^{-43} s$ após o “big-bang”), a maioria dos modelos admite como causa deste comportamento um campo escalar, o inflatão, ou vários campos escalares, sujeitos a um determinado potencial. A introdução destes campos pode ser feita no quadro mais geral das teorias escalares tensoriais, que escritas convenientemente, incluem, para além das equações da relatividade geral e as equações que regem a dinâmica dos campos, termos de interação entre a matéria e os campos. Estes campos escalares nunca foram observados e fisicamente poderão corresponder ao bóson de Higgs das teorias de grande unificação, a outros graus de liberdade da métrica associados a teorias de ordem superior, a teorias de super-cordas ou ao valor da “constante” de gravitação dado por um campo escalar que evolui no tempo como nas teorias escalares tensoriais [L⁺97].

A *época de gravidade quântica* ocorre antes do instante de Planck. Nesta época a relatividade usual poderá não ser válida. Admite-se que a evolução do universo só é modelada pela relatividade geral durante as duas últimas épocas e que a época de gravidade quântica é modelada por teorias de gravitação modificadas.

A homogeneidade e isotropia espacial são confirmadas pela distribuição de galáxias e pela radiação de fundo. No entanto, verifica-se observacionalmente que existem galáxias, aglomerados de galáxias e aglomerados de aglomerados de galáxias sendo estas as estruturas de maior dimensão do universo. Assim, embora a homogeneidade espacial não seja verificada exactamente a todas as escalas esta hipótese simplifica drasticamente as equações. Historicamente estas hipóteses foram introduzidas com este objectivo. As componentes da métrica dependem neste caso apenas da coordenada temporal o que permite escrever as equações do campo como equações diferenciais ordinárias que são não lineares. Os modelos que possuem a propriedade de homogeneidade espacial são denominados modelos de Bianchi.

A hipótese da homogeneidade e isotropia espacial é implicada por um princípio de razão insuficiente. Este princípio afirma que se os observadores terrestres não ocupam um posição privilegiada no universo e se este parece homogéneo então deverá parecer também homogéneo para quaisquer outros observadores. A homogeneidade espacial é consequência desta isotropia espacial em todos os pontos. Este princípio restringe drasticamente a classe de modelos cosmológicos que se podem usar para modelar a evolução do universo cujo único grau de liberdade é o factor de escala global. O estudo sistemático destes modelos, designados por FLRW, foi iniciado por A. Friedmann [Fri22] e G. Lemaitre [Lem27] colocado num quadro geométrico por H. P. Robertson [Rob35] e A. G. Walker [Wal36]

Estes modelos são muito particulares. As suas equações têm uma dinâmica que exclui, por comparação com os outros modelos mais complicados, um conjunto

de comportamentos essenciais e genéricos das soluções de equações diferenciais ordinárias não lineares. Por terem apenas um grau de liberdade as suas equações têm uma dinâmica fácil de estudar que exclui o comportamento caótico. Este último tipo de comportamento pode ser encontrado, por exemplo, nos modelos de Bianchi de curvatura positiva com dois [OSS97] e três graus de liberdade [CL97] e nos modelos das teorias escalares tensoriais mais simples [MOS98].

Apesar das duas últimas épocas serem bem descritas pela relatividade geral no quadro do modelo cosmológico padrão as duas primeiras épocas são bastante mais complexas do ponto de vista físico. As dificuldades do modelo cosmológico padrão em explicar a evolução do universo foram formuladas em termos de problemas e estão relacionadas com o horizonte das partículas, *i. e.*, a distância percorrida pela luz desde o “big-bang” até um determinado ponto. Como as idades previstas pelos modelos de FLRW são finitas existem regiões do espaço que nunca interagiram e portanto estão fora do horizonte causal de cada uma. Não há, por isso, razão nenhuma para assumir que tenham evoluído de uma maneira semelhante. No entanto, os factos observacionais expressam o contrário, existem regiões no universo que, embora causalmente desconexas, evoluíram da mesma maneira. Possuem galáxias, aglomerados de galáxias, etc, têm distribuições de massa semelhantes e as mesmas anisotropias da radiação cósmica de fundo. Assim, parece natural admitir que no passado estas regiões estiveram causalmente conexas o que parece estar em oposição com as previsões do modelo cosmológico padrão. Este é o denominado *problema do horizonte*.

Um outro problema é o problema da densidade crítica formulado em termos do parâmetro densidade Ω que é proporcional à razão entre a densidade de energia do universo e a sua taxa de expansão; para $\Omega > 1$ o conteúdo material obriga a um recolapso do universo, um “big-crunch”, para $\Omega < 1$ não existe matéria suficiente para parar a expansão e para o valor crítico $\Omega = 1$ o universo só parará a sua expansão em $t = +\infty$. No modelo de FLRW de curvatura nula tem-se $\Omega = 1$, por isso este problema é também denominado o *problema do universo plano*. Os modelos de FLRW não explicam porque é que se tem observacionalmente $0.1 < \Omega < 10$, *i. e.*, $\Omega \simeq 1$ ($k = 0$). Assim, a menos que se tenha tido no passado $k = 0$ exactamente ter-se-ia $\Omega \simeq 0$ para $k = -1$ e $\Omega \gg 1$ para $k = 1$. Note-se que estes dois problemas não são independentes um do outro.

Muitos dos problemas do modelo cosmológico padrão parecem ser resolvidos se se admitir que o universo sofreu um período de expansão acelerada. Num tal cenário o universo poderia ser inicialmente não homogéneo e anisotrópico mas conteria uma pequena região, que daria origem ao universo observável, causalmente conexa que se expandiria inflacionariamente. Assim as heterogeneidades seriam varridas para fora desta região e o universo observável seria apenas constituído pelas partes que estiveram causalmente interligadas no passado. Este mecanismo permitiria resolver o problema do horizonte e também o problema da densidade crítica. No entanto o mecanismo pelo qual se impõe este regime não é conhecido.

Nos anos 80 Guth [Gut81] propôs um possível cenário inflacionário no qual se resolveriam os problemas enunciados anteriormente. O universo inicial estaria num

estado “meta-estável” de falso-vácuo no qual a densidade de energia seria muito grande, comparativamente com a densidade de energia da matéria usual, dominando todas as outras contribuições originando um comportamento inflacionário para o factor de escala. Impondo estas restrições nos modelos de FLRW, na forma de uma constante cosmológica não nula, é fácil ver que o comportamento assintótico do factor de escala é exponencial. No caso do modelo de curvatura nula esta solução é exacta e é denominada solução de de Sitter.

Embora o modelo de Guth resolva os problemas da densidade crítica e do horizonte não fornece nenhum processo pelo qual se daria o fim de inflação. No modelo de Guth o universo expande indefinidamente com um comportamento exponencial. Por outro lado, este modelo não permite explicar as anisotropias observadas. Assim, têm sido feitas, desde essa altura, outras alterações ao modelo cosmológico padrão. O resultado de tais alterações originou teorias tais como a teoria de Brans-Dicke [BD61] e as teorias escalares tensoriais. A introdução de um campo escalar, para além de fornecer um processo simples para que ocorra um período de inflação, permite também relacionar de uma maneira muito natural as anisotropias observadas com as flutuações de um campo escalar [MFB92]. Nestas últimas teorias admite-se que o conteúdo material é dominado por um campo escalar sujeito a um determinado potencial. Supõe-se que no início da época de inflação o campo desceria lentamente o potencial a que estaria sujeito obrigando o factor de escala do universo a sofrer um período de expansão acelerada. A este comportamento do campo dá-se o nome de “slow-roll”. O período de inflação acabará quando o campo começar a oscilar em torno do mínimo do potencial. A este processo dá-se o nome de *inflação caótica* [Lin83].

Estas modificações ao modelo cosmológico padrão e à teoria da relatividade geral introduzem novos graus de liberdade nas equações permitindo assim, à custa do aumento da dificuldade do estudo das equações, obter as propriedades necessárias à descrição da evolução do universo. A modificação essencial, que se tratará nesta dissertação, é a introdução de um campo escalar, referido anteriormente, *i. e.*, de mais um grau de liberdade nas equações. Note-se que no caso dos modelos de FLRW, que têm apenas um grau de liberdade, a introdução de um campo escalar torna possível a existência de comportamento caótico que, de outra maneira, só seria possível com uma métrica não isotrópica. No entanto, os aspectos considerados essenciais da evolução do universo podem ser modelados apenas com um modelo completamente isotrópico mais um campo escalar.

Nesta dissertação considerar-se-ão apenas os casos mais simples das duas classes de teorias expostas acima: o caso dos modelos de FLRW com um fluido perfeito, como representante de um modelo espacialmente homogéneo da relatividade geral e o modelo correspondente de FLRW com um campo escalar e matéria com o respectivo termo de interacção, representante das teorias escalares tensoriais.

As equações diferenciais ordinárias que se obtêm no caso dos modelos espacialmente homogéneos na relatividade geral e no caso das teorias escalares tensoriais são muito semelhantes e a sua forma pode ser descrita sucintamente através da divisão dos graus de liberdade em dois tipos: o primeiro tipo corresponde apenas

ao factor de escala global que tem um comportamento monótono no tempo na maioria dos casos, em que se exceptua o caso dos modelos de curvatura positiva; os outros graus de liberdade pertencem ao segundo tipo. São quantidades que têm um comportamento oscilante no tempo cujo amortecimento é controlado pela taxa de expansão do factor de escala e pelo potencial a que estão sujeitos. Em geral as equações são constituídas por uma integral primeira que expressa a conservação da energia e equações de osciladores amortecidos para os graus de liberdade oscilantes. Estas observações são válidas para os modelos de espacialmente homogêneos tanto na relatividade geral como nas teorias escalares tensoriais.

O estudo das equações diferenciais ordinárias é feito através de resolução numérica das equações, com um método de passo adaptativo Runge-Kutta 7(8) [BF97] [HNW91] e análise qualitativa das equações.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma: no *Capítulo 2* faz-se uma descrição da relatividade geral e uma dedução das equações gerais através de um princípio variacional. Incluir-se-à também uma discussão sobre os modelos cosmológicos homogêneos e em particular sobre os modelos de Bianchi diagonais da classe *A*. O *Capítulo 3* trata do estudo dos modelos de FLRW com matéria e com um campo escalar. É feito o estudo qualitativo das soluções das equações para todos os tipos de matéria. Discute-se a semelhança com o caso de um campo escalar. É feito um estudo completo sobre as condições necessárias para que ocorra um período de inflação e discute-se a hipótese restritiva usualmente feita, denominada de “slow-roll”, no estudo destes sistemas através da introdução de um potencial do tipo duplo-poço a que está sujeito o campo escalar. No *Capítulo 4* trata-se as teorias escalares tensoriais. Faz-se uma exposição semelhante ao capítulo anterior mas agora com o termo de interacção que caracteriza este caso. Proceder-se-à também á dedução das equações gerais através de um princípio variacional. De igual maneira, faz-se um estudo qualitativo das equações diferenciais, que agora têm uma dimensão extra em relação ao capítulo anterior, para o caso em que o campo escalar está sujeito a um potencial constante. Usa-se este caso para obter a dinâmica qualitativa das soluções deste sistema em torno de um mínimo não degenerado do potencial. Para este caso, prova-se que, assintoticamente, a relatividade geral é um atractor das teorias escalares tensoriais. O método utilizado para obter este resultado difere do seguido em [MN98]. O estudo deste sistema, para valores finitos do factor de escala, é completado com o estudo das equações regularizadas no infinito. É feito um estudo sobre as condições necessárias para que ocorra um período de inflação suficiente tomando também um potencial do tipo duplo-poço. A análise das órbitas de “slow-roll”, neste caso e no caso de RG mais um campo escalar, constitui o núcleo do trabalho original que se apresenta nesta dissertação. O resultado final é o seguinte: todas as órbitas que produzem suficiente inflação são órbitas de “slow-roll” durante o período de inflação [CMN99]. No final faz-se uma comparação entre as equações das teorias escalares tensoriais e os modelos de Bianchi diagonais do tipo *A* e utiliza-se esta analogia para provar a conjectura do recolapso, para o modelo de FLRW de curvatura positiva, para uma escolha particular do potencial e termo de interacção entre a matéria e o campo. Por fim

faz-se uma conclusão sumária e considerações sobre trabalho futuro.

Capítulo 2

Relatividade geral

A teoria da relatividade geral (RG) é em simultâneo uma teoria da gravitação e uma teoria da geometria do espaço-tempo que relaciona directamente o conteúdo material com a geometria. A sua credibilidade funda-se, não só no facto de ser uma generalização da relatividade restrita, mas também nas propriedades dos modelos que propõe para a descrição da evolução do universo e nas previsões que estes modelos permitem fazer. Para além disso, constitui a base de outras teorias mais especulativas e relevantes para a cosmologia como as teorias escalares tensoriais que por sua vez permitem averiguar quais os limites de validade da relatividade geral na descrição dos fenómenos naturais. Como teoria geométrica o seu objectivo é estudar o espaço-tempo (ET) curvo quadridimensional e como teoria da gravitação o movimento da matéria contida nele. As propriedades geométricas e dinâmicas do ET são determinadas pela métrica

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (2.1)$$

onde está implícito o somatório sobre os índices repetidos ¹.

Neste capítulo far-se-á uma descrição dos fundamentos da relatividade geral e uma dedução das equações gerais através de um princípio variacional nos casos com e sem matéria. Incluir-se-á também uma discussão sobre os modelos cosmológicos homogéneos e as equações diferenciais ordinárias obtidas neste caso, em particular sobre os modelos de Bianchi diagonais. Apesar de estes resultados serem bem conhecidos [MTW73] são a base da formulação das teorias escalares tensoriais feita no capítulo quarto e por isso serão incluídos aqui.

Os fundamentos da teoria da relatividade geral são [D'I95]:

1. O princípio de equivalência que afirma que se pode eliminar, pelo menos localmente, os efeitos da gravidade num referencial em queda livre. O enunciado deste princípio é: existe uma transformação de coordenadas que leva

¹Os índices gregos são $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$ e os índices latinos $a, b, \dots = 1, 2, 3$.

a forma quadrática (2.1), localmente, a

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{22} = g_{33} = -g_{00} = 1 \\ g_{\mu\nu} &= 0, \quad \mu \neq \nu. \end{aligned}$$

Este sistema de coordenadas local, em que o campo gravítico foi localmente anulado, corresponde a um referencial em queda livre.

Afirma também que não é possível distinguir um campo gravítico de um campo inercial (aceleração uniforme) e que se devem considerar as forças gravíticas como forças de inércia.

2. Seguindo a relatividade restrita assume-se que partículas materiais descrevem geodésicas tipo tempo e que a luz descreve geodésicas nulas. As forças inerciais aparecem nas equações das geodésicas como conexões métricas de espaços de curvatura nula. Para se incluir o efeito extra da gravitação nas conexões métricas, já que devem ser consideradas como forças inerciais, as conexões deverão corresponder a espaços de curvatura não necessariamente nula. As geodésicas são solução da equação

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (2.2)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ são as conexões métricas. Estas quantidades são um não-tensor definido por

$$\Gamma_{\lambda\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (2.3)$$

que é simétrica nos índices inferiores $\Gamma_{\lambda\nu}^\mu = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu$.

3. As componentes da métrica desempenham o papel de potenciais na teoria e as equações finais deverão ter a mesma forma para qualquer referencial escolhido.
4. Os efeitos do campo gravítico reflectem-se nas órbitas descritas por partículas materiais. Este efeito manifesta-se nas geodésicas tipo tempo que se alteram, em relação ao caso do espaço plano, e cuja deformação é descrita pelo tensor de Riemann através da equação de desvio geodésico.

É também necessário introduzir alguns conceitos e definições que serão úteis no capítulos seguintes. O que se segue faz parte do formalismo matemático que suporta a teoria e é aplicável a qualquer espaço curvo de dimensão arbitrária.

1. O tensor de Riemann é um tensor que envolve derivadas parciais de segunda ordem da métrica e é igual a

$$R_{\mu\nu\sigma}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\sigma\eta}^\lambda \quad (2.4)$$

Tem $4^4 = 256$ componentes. Da definição de $R_{\mu\nu\sigma}^\lambda$ obtêm-se as simetrias

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\sigma}^\lambda &= -R_{\mu\sigma\nu}^\lambda \\ R_{\mu\nu\sigma}^\lambda + R_{\nu\sigma\mu}^\lambda + R_{\sigma\mu\nu}^\lambda &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por outro lado baixando o primeiro índice de (2.4) fica-se com

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\beta} R_{\nu\rho\sigma}^\beta = g_{\mu\beta} \Gamma_{\nu\sigma,\rho}^\beta + \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha\rho} - g_{\mu\beta} \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^\beta + \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha\sigma} \quad (2.6)$$

e substituindo as expressões para as conexões métricas (2.3) vem

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma,\nu\rho} - g_{\nu\sigma,\mu\rho} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} + g_{\nu\rho,\mu\sigma}) + \Gamma_{\beta\mu\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^\beta - \Gamma_{\beta\mu\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^\beta$$

o que dá a simetrias suplementares

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= -R_{\nu\mu\rho\sigma} \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} &= R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\sigma\rho\nu\mu}. \end{aligned}$$

Devido a todas estas simetrias só 20 das 254 componentes do tensor de Riemann são independentes.

É condição necessária e suficiente para que a métrica seja plana que o tensor de Riemann seja nulo [Dir75].

2. A derivada covariante ² de um tensor contravariante X^μ é dada por

$$\nabla_\lambda X^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu X^\nu$$

enquanto para um tensor covariante X_μ se tem

$$\nabla_\lambda X_\mu = \frac{\partial X_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu X_\nu.$$

Com esta definição facilmente se vê que a derivada covariante da métrica é nula, *i. e.*, $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$.

3. O comutador de dois vectores X e Y é dado por

$$[X, Y]_\nu = X^\mu \partial_\mu Y_\nu - Y^\mu \partial_\mu X_\nu. \quad (2.7)$$

Dado um vector X , a derivada de Lie de um tensor contravariante Y^α é definida por

$$L_X Y^\alpha = [X, Y]^\alpha = X^\beta \partial_\beta Y^\alpha - Y^\beta \partial_\beta X^\alpha$$

e de um tensor covariante Y_α

$$L_X Y_\alpha = X^\beta \partial_\beta Y_\alpha + Y_\beta \partial_\alpha X^\beta.$$

²É usual denotar-se a derivada covariante por $\nabla_\lambda() = ();\lambda$ e a derivada usual por $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}() = \partial_\lambda() = ();\lambda$.

4. O tensor de Riemann verifica a identidade de Bianchi

$$\nabla_\tau R_{\mu\rho\sigma}^\alpha + \nabla_\rho R_{\mu\sigma\tau}^\alpha + \nabla_\sigma R_{\mu\tau\rho}^\alpha = 0. \quad (2.8)$$

A contracção de dois dos índices para os quais o tensor de Riemann é anti-simétrico é nula. Caso contrário, da contracção de dois índices obtém-se o tensor de Ricci (a menos de um sinal)

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho.$$

Se contrairmos a identidade $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$ com $g^{\mu\rho}$ obtém-se

$$g^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\nu\mu\sigma}^\mu = R_{\sigma\mu\nu}^\mu$$

que é equivalente ao tensor de Ricci ser simétrico, $R_{\nu\rho} = R_{\rho\nu}$.

5. $R = R^\rho_\rho$ é o escalar de curvatura e é definido de tal maneira que a curvatura de uma esfera tridimensional seja positiva. A identidade de Bianchi para o tensor de Riemann (2.8) tem 5 índices livres. Da dupla contracção τ, α e μ, ρ , esta última obtida multiplicando (2.8) por $g^{\mu\rho}$, obtém-se a relação de um só índice livre

$$g^{\mu\rho} (\nabla_\tau R_{\mu\rho\sigma}^\alpha + \nabla_\rho R_{\mu\sigma\tau}^\alpha + \nabla_\sigma R_{\mu\tau\rho}^\alpha) = 0$$

e como $\nabla_\alpha g^{\mu\rho} = 0$

$$\nabla_\alpha (g^{\mu\rho} R_{\mu\rho\sigma}^\alpha) + \nabla_\rho (g^{\mu\rho} R_{\mu\sigma\alpha}^\alpha) + \nabla_\sigma (g^{\mu\rho} R_{\mu\alpha\rho}^\alpha) = 0$$

e de $g^{\mu\rho} R_{\mu\rho\sigma}^\alpha = -R_\sigma^\alpha$, $g^{\mu\rho} R_{\mu\sigma\alpha}^\alpha = -R_\sigma^\rho$ e $g^{\mu\rho} R_{\mu\alpha\rho}^\alpha = R$ obtém-se

$$\nabla_\alpha R_\sigma^\alpha - \frac{1}{2} \nabla_\sigma R = 0.$$

Elevando o índice inferior livre obtém-se

$$\nabla_\alpha \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right) = 0$$

que é a identidade de Bianchi para o tensor de Ricci.

A expressão explícita para o tensor de Ricci é

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda. \quad (2.9)$$

O tensor de Ricci é simétrico, no entanto, da sua expressão explícita, não é óbvio que isto seja verdade, especialmente para o segundo termo da expressão (2.9). Se $-g = |\det(g_{\mu\nu})|$ vem

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\mu}^\mu &= g^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} (g_{\lambda\nu,\mu} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} g_{\lambda\nu,\mu} \\ &= \frac{1}{2} g_{\nu,\mu}^\mu = \frac{1}{2} g^{-1} g_{,\nu} \end{aligned}$$

ou

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{-1}g_{,\mu} = \frac{1}{2}\ln(-g)_{,\mu}$$

logo

$$\Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}\ln(-g)_{,\mu\nu} = \frac{1}{2}\ln(-g)_{,\nu\mu}.$$

2.1 As equações de campo para a gravitação

Einstein propôs que no vazio, ou seja na ausência de matéria, a lei de gravitação fosse

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.10)$$

O espaço plano satisfaz a equação (2.10). As suas geodésicas são linhas rectas. Quando o espaço não é plano as equações de Einstein determinam o valor da curvatura.

À primeira vista as equações de Einstein (2.10) não têm qualquer semelhança com as equações de Newton para a gravitação. No entanto é possível fazer uma analogia entre as duas teorias se se considerar as componentes da métrica $g_{\mu\nu}$ como potenciais que descrevem o campo gravítico. Existem 10 campos em vez do único campo da teoria de Newton. Estes campos determinam a geometria do espaço-tempo.

As equações de Einstein para o vazio (2.10) implicam $R = 0$ e

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0. \quad (2.11)$$

Se se começar com a equação (2.11) obtém-se por contracção $R = 0$ o que implica (2.10).

Estas equações são, formalmente, equações às derivadas parciais de segunda ordem não lineares.

2.1.1 Equações de Einstein com matéria

Na presença de matéria estas equações têm de ser modificadas. Suponha-se que (2.11) é modificada para

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = T^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

onde $T^{\mu\nu}$ é um tensor simétrico que descreve a matéria. Da identidade de Bianchi

$$\nabla_{\nu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right) = 0$$

obtém-se

$$\nabla_\nu(T^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.13)$$

Assim qualquer tensor $T^{\mu\nu}$ que descreva a matéria tem que satisfazer a condição anterior, caso contrário a relação (2.12) não seria auto-consistente.

As equações (2.12) aparecem frequentemente escritas na literatura na forma

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}T^{\mu\nu} \quad (2.14)$$

onde G é a constante de gravitação universal e c a velocidade da luz. Daqui para frente faz-se $c = G = 1$, no entanto, sempre que for necessário, estas constantes serão repostas nas equações sem comentários.

De entre as várias decomposições possíveis, puramente algébricas, para o tensor energia-momento existe uma, em particular, com grande relevância física que tem a forma

$$T_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta + q_\alpha v_\beta + v_\alpha q_\beta + p(g_{\alpha\beta} + v_\alpha v_\beta) + \Pi_{\alpha\beta} \quad (2.15)$$

onde v_α é a velocidade da matéria, $\rho = T_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta$ é a densidade de massa-energia, $3p = T_{\alpha\beta}(g^{\alpha\beta} + v^\alpha v^\beta)$ é a pressão e as quantidades q_α e $\Pi_{\alpha\beta}$, que correspondem respectivamente a fluxos de energia e a tensões anisotrópicas, obedecem a

$$q_\alpha v^\alpha = 0, \quad \Pi_{\alpha\beta}v^\beta = 0, \quad \Pi_\alpha{}^\alpha = 0, \quad \Pi_{\alpha\beta} = \Pi_{\beta\alpha}.$$

Esta decomposição permite separar o tensor (2.15) em quantidades que são paralelas e ortogonais a v_α porque se $v^\alpha v_\alpha = -1$ então $(g^{\alpha\beta} + v^\alpha v^\beta)v_\alpha = 0$. Na maioria das aplicações considera-se apenas o caso do fluido perfeito para o qual se tem $q_\alpha = 0$, $\Pi_{\alpha\beta} = 0$ e $v_\alpha v^\alpha = -1$. Assim tensor energia-momento para um fluido perfeito é

$$T_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta + p(g_{\alpha\beta} + v_\alpha v_\beta). \quad (2.16)$$

Considera-se também a equação de estado

$$p = (\gamma - 1)\rho \quad (2.17)$$

com γ constante e $0 \leq \gamma \leq 2$ que generaliza a equação de estado clássica de um fluido perfeito. Note-se que para $\gamma < 1$ se tem $p < 0$.

A introdução de um campo escalar, ϕ , na relatividade geral é feita através do tensor energia-momento para o campo escalar

$$T_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - \left[\frac{1}{2} \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi + V(\phi) \right]. \quad (2.18)$$

Se $\nabla_\alpha \phi$ for um vector tipo tempo pode definir-se um vector velocidade por

$$v_\alpha = \frac{\nabla_\alpha \phi}{\sqrt{\nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi}}, \quad (2.19)$$

uma densidade de energia

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi + V(\phi) \quad (2.20)$$

e uma pressão

$$p_\phi = \frac{1}{2} \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi - V(\phi), \quad (2.21)$$

onde $T_{\alpha\beta}$ fica com a forma de um fluido perfeito com $q_\alpha = 0$, $\Pi_{\alpha\beta} = 0$ e $v_\alpha v^\alpha = -1$.

Definindo o tensor de Einstein $G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R$ as equações (2.14) ficam

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\mu\nu}.$$

O tensor $T^{\mu\nu}$ com este coeficiente pode ser interpretado como uma densidade-fluxo de energia-momento. $T^{\mu 0}$ é a densidade de energia e $T^{\mu a}$ o fluxo. Num espaço plano as equações (2.13) ficam

$$\partial_\nu (T^{\mu\nu}) = 0$$

que contêm as equações do movimento de um fluido relativista e que expressam a conservação de massa-energia. Logo, em última análise, as equações (2.13) justificam o uso das relações (2.12) como as equações do campo gravítico com matéria já que ∂_ν num espaço plano se generaliza naturalmente para ∇_ν num espaço curvo.

É ainda possível escrever as equações (2.14) na forma

$$R^\mu_\nu = 8\pi \left(T^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu T \right) \quad (2.22)$$

pois $R = -8\pi T$.

Uma maneira alternativa de obter as equações (2.14) é a de recorrer a um princípio variacional.

2.1.2 Princípio variacional

Vai tratar-se em primeiro lugar do princípio variacional para o espaço vazio.

Considere-se o funcional, usualmente designado por funcional de Einstein-Hilbert [Dir75],

$$I = \int R \sqrt{-g} d^4 x \quad (2.23)$$

e tomem-se pequenas variações $\delta g_{\mu\nu}$ na métrica $g_{\mu\nu}$, mantendo $g_{\mu\nu}$ e as suas primeiras derivadas constantes na fronteira. Vai-se mostrar que de $\delta I = 0$ para variações arbitrárias $\delta g_{\mu\nu}$ se obtêm as equações de Einstein para o vazio.

Da definição de $R_{\mu\nu}$ (2.9) tem-se

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^* - L,$$

onde

$$\begin{aligned} R^* &= g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu,\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\sigma) \\ L &= g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma). \end{aligned} \quad (2.24)$$

O funcional I (2.23) contém derivadas de segunda ordem de $g_{\mu\nu}$ nos termos de R^* . É fácil ver que

$$\begin{aligned} R^* \sqrt{-g} &= - (g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma \sqrt{-g})_{,\nu} + (g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \sqrt{-g})_{,\sigma} \\ &+ (g^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - (g^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Os dois primeiros termos são derivadas totais que não contribuem para δI porque as variações $\delta g_{\mu\nu}$ são nulas na fronteira. Mantém-se então os dois últimos termos. Com as relações auxiliares

$$\begin{aligned} g_{,\sigma}^{\alpha\beta} &= -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g_{\mu\nu,\sigma} \\ \Gamma_{\mu\nu\sigma} + \Gamma_{\nu\mu\sigma} &= g_{\mu\nu,\sigma} \\ g^{-1} g_{,\nu} &= 2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \sqrt{-g}_{,\nu} \\ \Gamma_{\nu\mu}^\mu \sqrt{-g} &= \sqrt{-g}_{,\nu} \end{aligned} \quad (2.26)$$

e ainda

$$(g^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\sigma} = \left(-g^{\nu\beta} \Gamma_{\beta\sigma}^\mu - g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^\nu + g^{\mu\nu} \Gamma_{\sigma\beta}^\beta \right) \sqrt{-g}$$

que por contracção de σ e ν dá

$$(g^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\nu} = -g^{\nu\beta} \Gamma_{\beta\nu}^\mu \sqrt{-g},$$

os dois últimos termos ficam de (2.25) ficam

$$-g^{\nu\beta} \Gamma_{\beta\nu}^\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma \sqrt{-g} + \left(2g^{\nu\beta} \Gamma_{\beta\sigma}^\mu - g^{\mu\nu} \Gamma_{\sigma\beta}^\beta \right) \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \sqrt{-g} = 2L \sqrt{-g}.$$

Assim, (2.23) fica

$$I = \int L \sqrt{-g} d^4 x \quad (2.27)$$

onde L só contém termos com $g_{\mu\nu}$ e as suas primeiras derivadas (é uma função homogênea de segundo grau nestas derivadas).

Seja $\mathcal{L} = L \sqrt{-g}$. Tome-se \mathcal{L} , a menos de uma constante multiplicativa, como a densidade de acção para o campo gravítico. Não é uma densidade escalar, mas

é mais conveniente usa-la do que $R\sqrt{-g}$, que é uma densidade escalar, porque \mathcal{L} não contém derivadas de segunda ordem.

Varie-se então \mathcal{L} . Para o primeiro termo obtém-se

$$\begin{aligned} \delta \left(\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) &= \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right)_{,\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta \left(g^{\alpha\nu} \sqrt{-g} \right)_{,\nu} \\ &\quad - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) \end{aligned}$$

e para o segundo

$$\begin{aligned} \delta \left(\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) &= 2 \left(\delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \right) \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) \\ &= 2\delta \left(\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) - \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right). \end{aligned}$$

Usando (2.26) vem

$$\delta \left(\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) = -\delta \left(g^{\nu\beta} \sqrt{-g} \right)_{,\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right).$$

Substituindo na expressão de $\delta\mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right)_{,\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \delta \left(g^{\alpha\nu} \sqrt{-g} \right)_{,\nu} \\ &\quad + \left(\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \right) \delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Os dois primeiros termos de (2.28) diferem de uma derivada total pelos termos

$$-\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} \delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) + \Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\beta} \delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right).$$

Portanto, usando (2.9),

$$\delta I = \delta \int \mathcal{L} d^4x = \int R_{\mu\nu} \delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) d^4x. \quad (2.29)$$

Com $\delta g^{\mu\nu}$ arbitrários $\delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right)$ também são arbitrários, logo a condição $\delta I = 0$ dá as equações de E para o vazio na forma $R_{\mu\nu} = 0$. Por outro lado $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}$ e $\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}$ logo

$$\delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) = - \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right) \sqrt{-g} \delta g_{\alpha\beta}.$$

A equação (2.29) fica

$$\delta I = - \int \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right) \sqrt{-g} \delta g_{\alpha\beta} d^4x. \quad (2.30)$$

De $\delta I = 0$ obtém-se então as equações de E para o vazio na forma

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R = 0.$$

Na presença de matéria é necessário acrescentar um termo com a forma $I_m = \int L_m \sqrt{-g} d^4x$ à acção (2.23), onde L_m é o lagrangeano dos campos materiais. Se se denotar por I_g a acção puramente geométrica (2.23) o princípio de estacionariedade fica

$$\delta(I_g + I_m) = 0$$

e procedendo como anteriormente facilmente se obtém a equação

$$\frac{1}{8\pi} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu}} = 0.$$

Comparando com (2.14) vê-se que o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ deriva directamente do lagrangeano dos campos materiais L_m e que tem a forma

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu}}. \quad (2.31)$$

Por exemplo, a formulação da relatividade geral para o vazio com um campo escalar é feita a través da acção

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \{ R - \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi - 2V(\phi) \} \quad (2.32)$$

onde ϕ é o campo escalar e $V(\phi)$ uma função de ϕ .

As equações gerais obtêm-se de (2.32) por variação de $g_{\alpha\beta}$ e ϕ . A variação de $g_{\alpha\beta}$ dá, com (2.30),

$$G^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi + V(\phi) \right] - \nabla_\alpha \phi \nabla^\beta \phi. \quad (2.33)$$

A variação de ϕ dá, directamente, a equação de movimento para o campo

$$\square \phi + V'(\phi) = 0. \quad (2.34)$$

2.1.3 A constante cosmológica

Einstein considerou a seguinte generalização das equações da RG para o vazio,

$$R_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.35)$$

onde Λ é uma constante. Esta constante tem um valor muito pequeno porque a ordem de grandeza das correcções relativistas às órbitas newtonianas do sistema solar forçam $\Lambda \ll 1$. Como $R_{\mu\nu}$ contém derivadas de segunda ordem da métrica $g_{\mu\nu}$, Λ tem dimensões de (distância)⁻². Assim só para escalas maiores ou iguais que esta distancia é que os seus efeitos se tornam relevantes. Portanto este termo

extra é importante para teorias cosmológicas [Wei89] [EBL⁺99] [P⁺98]. Para se obter esta extensão das equações de E a partir de um princípio variacional basta adicionar à acção o termo extra

$$I_\Lambda = K \int \sqrt{-g} d^4x$$

à acção, onde K é uma constante a determinar. Assim

$$\delta I_\Lambda = K \int \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x.$$

O princípio de estacionariedade

$$\delta(I_g + I_\Lambda) = 0$$

dá

$$(16\pi)^{-1} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) - \frac{1}{2} K g_{\mu\nu} = 0.$$

Da equação (2.35) obtém-se

$$R = -4\Lambda$$

logo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.36)$$

A equação (2.36) concorda com (2.35) desde que

$$K = \frac{\Lambda}{8\pi}.$$

2.2 Modelos cosmológicos homogéneos

Um dos métodos básicos para se obter soluções da RG consiste na análise de soluções que são invariantes relativamente a um conjunto particular de transformações de coordenadas. Estas soluções possuem simetrias profundas e são as mais simples e também as mais naturais em astrofísica e cosmologia. Duas das restrições habituais são as hipóteses de homogeneidade espacial e isotropia.

A hipótese da homogeneidade espacial significa que as propriedades métricas são as mesmas em todos os pontos do espaço. Esta hipótese permite reduzir as equações de E a equações diferenciais ordinárias. A hipótese da isotropia significa que as propriedades métricas são as mesmas em todas as direcções do espaço. Esta hipótese permite reduzir drasticamente o número de graus de liberdade das equações.

A definição exacta destas simetrias está ligada ao estudo do conjunto de transformações de coordenadas que deixam a métrica invariante. O problema geral de, dada uma métrica, encontrar as transformações que a deixam invariante não é trivial. O recíproco deste problema, construir uma métrica com determinadas simetrias, é mais fácil de resolver. A cada simetria está usualmente associada uma hipótese física bem determinada.

2.3 Propriedades gerais

Os modelos cosmológicos homogêneos são definidos como espaços-tempos cuja métrica obedece às equações de Einstein e que são invariantes para uma álgebra de Lie real, L , tridimensional. A classificação destes modelos reduz-se á classificação das álgebras L . Os elementos de L actuam somente na parte espacial da métrica. Sobre os detalhes mais técnicos deste assunto consultar [Mac79]. Daqui para a frente considerar-se-ão apenas estes modelos.

Para se perceber, em geral, qual a relação entre as álgebras L e as simetrias de uma métrica espacialmente homogênea considere-se um campo de vectores X e uma transformação de coordenadas $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \varepsilon X^\alpha(x)$ onde $0 < \varepsilon \ll 1$. A aplicação linear associada é igual a

$$a_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha + \varepsilon \partial_\beta X^\alpha. \quad (2.37)$$

Como a métrica se transforma como $g_{\alpha\beta}(x) = a_\alpha^\gamma a_\beta^\delta g'_{\gamma\delta}(x')$ substituindo (2.37) mantendo os termos de primeira ordem em ε obtém-se

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) + \varepsilon \left(g_{\alpha\delta} \partial_\beta X^\delta + g_{\beta\delta} \partial_\alpha X^\delta + X^\rho \partial_\rho g_{\alpha\beta} \right) + O(\varepsilon^2).$$

Portanto, para a métrica ser invariante face à transformação (2.37), basta que a derivada de Lie, $L_X g_{\alpha\beta}$, seja nula, *i. e.*,

$$\begin{aligned} L_X g_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\delta} \partial_\beta X^\delta + g_{\beta\delta} \partial_\alpha X^\delta + X^\rho \partial_\rho g_{\alpha\beta} \\ &= \nabla_\beta X_\alpha + \nabla_\alpha X_\beta = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dá-se o nome de isometria à transformação linear (2.37) que verifica (2.38). Ao vector X associado dá-se o nome de vector de Killing.

No caso dos modelos espacialmente homogêneos é possível separar na métrica a dependência temporal da espacial. Em cada hipersuperfície espacial a evolução temporal da métrica em cada ponto é a mesma o que permite folhear o espaço-tempo em superfícies síncronas. Este facto obriga as componentes mistas da métrica, com índices temporais e espaciais, a serem nulas. É possível caracterizar as simetrias da métrica através de três campos de vectores de Killing X_1 , X_2 e X_3 com componente temporal nula e que são os geradores da álgebra de Lie com o comutador (2.7). Fica assim feita a separação de coordenadas pretendida e definida a classe das álgebras de Lie L .

Por definição de álgebra de Lie têm-se as seguintes propriedades:

1.
$$[X_a, X_b] = -[X_b, X_a]. \quad (2.39)$$

2.
$$[X_a, X_b] = C_{ab}^c X_c \quad (2.40)$$

onde as constantes $C_{ab}^c = -C_{ba}^c$ são anti-simétricas nos índices inferiores.

3. O comutador é bi-linear como função dos seus argumentos.

4. Vale a identidade de Jacobi

$$[[X_a, X_b], X_c] + [[X_b, X_c], X_a] + [[X_c, X_a], X_b] = 0. \quad (2.41)$$

Substituindo (2.40) na identidade de Jacobi (2.41) obtém-se

$$C_{ab}^f C_{cf}^d + C_{bc}^f C_{af}^d + C_{ca}^f C_{bf}^d = 0. \quad (2.42)$$

Usando os vectores X_1, X_2 e X_3 como uma base dos vectores tangentes a cada hipersuperfície em cada ponto a métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ab}(t)dX^a dX^b \quad (2.43)$$

onde X^a é a base dual da base X_a . Da mesma maneira, todas as quantidades passam a ser escritas apenas como função do tempo já que a dependência espacial ficou incluída nos vectores da base. Assim as propriedades destes modelos são completamente descritas pelas álgebras de Lie correspondentes através das constantes de estrutura.

As conexões métricas escrevem-se [Mac79] à custa da métrica (2.43) e das constantes de estrutura (2.40) o que permite calcular todas as quantidades relevantes para o estudo destes modelos, a saber, o tensor de Riemann e as suas contracções.

2.3.1 Classificação de Bianchi

A classificação das álgebras de Lie tridimensionais foi feita por Bianchi em 1897 e induz uma classificação para os modelos cosmológicos espacialmente homogêneos. Como as constantes de estrutura são anti-simétricas nos índices inferiores podem ser escritas na forma $C_{ab}^c = \varepsilon_{abd} C^{dc}$, onde $\varepsilon_{abc} = \varepsilon^{abc}$ ($\varepsilon_{123} = 1$) é o símbolo completamente anti-simétrico.

As condições de Jacobi (2.42) são as únicas condições às quais têm que satisfazer as constantes de estrutura. Entre as várias combinações admissíveis, existem, porém, condições equivalentes em que a diferença é devida exclusivamente a transformações de semelhança nos vectores X_a . Assim a classificação destes modelos reduz-se à determinação de todas as combinações não equivalentes das constantes de estrutura.

Bianchi	m	n_1	n_2	n_3	Curvatura constante
I	0	0	0	0	$= 0$
II	0	1	0	0	—
VI_0	0	1	-1	0	—
VII_0	0	1	1	0	$= 0$
$VIII$	0	1	1	-1	—
IX	0	1	1	1	> 0
III	1	1	-1	0	—
IV	1	1	0	0	—
V	1	0	0	0	< 0
$VI (m \neq 1)$	m	1	-1	0	—
VII	m	1	1	0	< 0

Tabela 2.1: Classificação de Bianchi para os modelos cosmológicos espacialmente homogêneos. Inclui-se, na última coluna, o modelo de curvatura constante incluído em cada classe.

Para este efeito decompõe-se o tensor C^{ab} nas suas partes simétrica e anti-simétrica $C^{ab} = n^{ab} + \epsilon^{abc}m_c$ com $n^{ab} = \frac{1}{2}(C^{ab} + C^{ba})$ e $\epsilon^{abc}m_c = \frac{1}{2}(C^{ab} - C^{ba})$. A introdução destas igualdades na identidade de Jacobi (2.42) dá

$$n^{ab}m_b = 0. \quad (2.44)$$

Reduzindo n^{ab} à sua forma diagonal a igualdade (2.44) fica $n_1m_1 + n_2m_2 + n_3m_3 = 0$. E sem perda de generalidade para a classificação pode supor-se que $m_b = (0, 0, m)$ o que reduz a igualdade anterior a $n_3m = 0$, *i. e.*, uma das quantidades, n_3 ou m , tem que ser nula.

As relações de comutação ficam agora

$$[X_1, X_2] = X_3n_3, \quad [X_2, X_3] = X_1n_1 - X_2m, \quad [X_3, X_1] = X_2n_2 + X_1m.$$

Pelas propriedades das transformações lineares dos campos X_a todas as álgebras de Lie tri-dimensionais reduzem-se a nove tipos e, portanto, os modelos homogêneos dividem-se naturalmente em duas classes (ver Tabela (2.1)): a classe A ($m = 0$, parte de cima da tabela) e a classe B ($m \neq 0, n_3 = 0$, parte de baixo da tabela). Na última coluna indica-se qual o modelo de curvatura constante incluído na classe de Bianchi respectiva.

O tensor de Ricci das hipersuperfícies tridimensionais, P_{ab} , pode ser escrito [Mac79] em termos de n^{ab} e m_c como

$$P_{ab} = \epsilon_{cda}n_b^d m^c + \epsilon_{cdb}n_m^d m^c + 2n_m^c n_{cb} - n_c^c n_{ab} - \delta_{ab} \left(2m_c m^c + n_{cd}n^{cd} - \frac{1}{2}(n_c^c)^2 \right). \quad (2.45)$$

O escalar de curvatura é igual a

$$P = P_{ab}g^{ab} = -6m_c m^c - n_{cd}n^{cd} + \frac{1}{2}(n_c^c)^2. \quad (2.46)$$

Os modelos de curvatura constante são caracterizados por tensor de Ricci tridimensional $P_{ab} = 2\frac{k}{a^2}g_{ab}$ e curvatura $P = 6\frac{k}{a^2}$, onde k é uma constante arbitrária e a o factor de escala global definido por $a^3 = \sqrt{\det(g_{ab})}$.

2.4 Equações de Einstein para os modelos cosmológicos homogéneos

O tensor de Ricci R_{ab} escreve-se à custa da métrica (2.43), $g_{ab}(t)$, das suas derivadas de primeira ordem em ordem ao tempo, $\dot{g}_{ab}(t)$, das de segunda ordem, $\ddot{g}_{ab}(t)$, e das constantes de estrutura n^{ab} e m_c , através do tensor curvatura tridimensional P_{ab} (2.45).

Define-se o tensor $\sigma_{ab} = \dot{g}_{ab} - 2\frac{\dot{a}}{a}g_{ab}$, que é um tensor com traço nulo $\sigma^c_c = 0$, denominado tensor de “shear”, dado que mede a evolução temporal do afastamento das componentes da métrica em relação ao caso isotrópico. De facto se $\sigma_{ab} = 0$ então a métrica escreve-se $g_{ab} = a^2$ (a menos de uma constante aditiva). Com esta notação as equações de E, na forma (2.14), com o tensor de energia-momento de fluido perfeito (2.16), ficam ³

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ba} + \frac{1}{2}P = \Lambda + \rho \quad (2.47)$$

$$\dot{\sigma}_{ab} + 3\frac{\dot{a}}{a}\sigma_{ab} + P_{ab} - \frac{1}{3}g_{ab}P = 0 \quad (2.48)$$

com a restrição

$$\epsilon_{abc}n^{ce}\sigma^b_e - 3\sigma_a^b a_b = 0. \quad (2.49)$$

A equação (2.47) é a equação $G_{00} = T_{00}$ e (2.48) é a parte de traço nulo de $G_{ab} = T_{ab}$. A equação (2.49) é $R_{0a} = 0$.

Derivando (2.47) e usando (2.48) obtém-se

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda - \sigma_{ab}\sigma^{ba} - \frac{\rho + 3p}{2} \quad (2.50)$$

que é a equação $R = -T$. As identidades de Bianchi para o tensor de curvatura tri-dimensional são

$$\epsilon_{abc}n^{ce}P^b_e - 3\left(P_a^b - \frac{1}{3}Pg_a^b\right)m_b = 0. \quad (2.51)$$

³Onde se retirou o factor 8π por comodidade de escrita.

Repare-se que uma classe de modelos muito mais simples seria aquela com $\sigma_{ab} = 0$, que é compatível com (2.49). Esta classe de modelos com a hipótese adicional de curvatura constante constitui a classe dos modelos de FLRW.

Note-se que a forma anterior das equações (2.47), (2.48) e (2.50) oculta a dependência funcional de cada um dos termos que as compõem. O tensor σ_{ab} é uma função de \dot{g}_{ab} , de g_{ab} e do factor de escala global a enquanto o tensor de curvatura tridimensional só depende de g_{ab} . De facto a equação (2.48) não é a equação do “shear”, propriamente dita, mas uma equação de segunda ordem nas componentes da métrica.

Estas equações mostram que as equações de E para os modelos homogêneos com o tensor energia-momento de fluido perfeito formam um sistema de equações diferenciais de dimensão doze com uma equação de estado $p = p(\rho)$ que tem necessariamente que ser fornecida. Note-se que a equação (2.50) não é independente das equações (2.47) e (2.48).

O comportamento assintótico destes modelos para o caso de constante cosmológica nula, $\Lambda = 0$, e para o vazio é mais complicado de estudar. Todos os modelos de Bianchi têm um comportamento de expansão excepto o modelo de Bianchi tipo *IX*. O estudo deste modelo levou à formulação da conjectura do recolapso confirmada [LW89] por R. Wald, e Xue-feng Lin, em 1989. Este modelo recolapsa após ter atingido um instante de expansão máxima. Este tipo de comportamento ocorre, em particular, no modelo de curvatura positiva de FLRW.

É possível escrever as equações (2.47) e (2.48) de uma maneira muito mais simples que as tornam muito apelativas e semelhantes aquelas que descrevem a dinâmica dos campos nas teorias escalares tensoriais [WE97] [Wal83]. Como exemplo vai considerar-se apenas o caso dos modelos de Bianchi da classe *A* diagonais. Apesar de ser possível extender esta análise aos restantes modelos da classe *B* isso não será feito aqui e remete-se por isso para a referência [RS75]. Como σ_{ab} é igual a

$$\sigma_{ab} = a^2 \frac{d}{dt} \left[\frac{g_{ab}}{a^2} \right]. \quad (2.52)$$

Definindo uma nova métrica através da transformação conforme $\tilde{g}_{ab} = \frac{g_{ab}}{a^2}$ e uma nova coordenada independente τ por $\frac{dt}{d\tau} = a^2$, vem

$$\sigma_{ab} = \frac{d\tilde{g}_{ab}}{d\tau} = \tilde{g}'_{ab}. \quad (2.53)$$

A equação (2.48) para o “shear” fica

$$\tilde{g}''_{ab} + 3\frac{a'}{a}\tilde{g}'_{ab} + \tilde{V}_{ab} = 0 \quad (2.54)$$

onde $\tilde{V}_{ab} = \tilde{P}_{ab} - \frac{1}{3}\tilde{g}_{ab}\tilde{P}$ é apenas uma função de \tilde{g}_{ab} . Como $\tilde{P}_{ab} = P_{ab}$ e $\tilde{P} = a^2 P$ [Wal84] tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{ab} = \epsilon_{cda} n_b^d m^c + \epsilon_{cdb} n_a^d m^c &+ 2m_c m^c \delta_{ab} - n^c{}_c n_{ab} \\ &+ \frac{1}{3} \delta_{ab} (n^c{}_c)^2 + 2 \left(n_a^c n_{cb} - \frac{1}{3} \delta_{ab} n_{cd} n^{cd} \right). \end{aligned}$$

As equações (2.47) e (2.50) ficam, respectivamente,

$$3 \frac{1}{a^4} \frac{a'^2}{a^2} = \frac{1}{2} \tilde{g}'_{ab} \tilde{g}'^{ba} - \frac{1}{2} a^{-2} \tilde{P} + \Lambda + \rho \quad (2.55)$$

$$3 \frac{1}{a^3} \left(\frac{a'}{a^2} \right)' = \Lambda - \tilde{g}'_{ab} \tilde{g}'^{ba} - \frac{\rho + 3p}{2}. \quad (2.56)$$

Note-se que o tensor σ_{ab} tem a propriedade $\sigma_b{}^b = 0$ o que significa que $\tilde{g}'_{ab} g^{ab} = 0$ que é equivalente a afirmar que $\det'(\tilde{g}_{ab}) = 0$. Claro que o mesmo se poderia ter obtido de $\det(\tilde{g}_{ab}) = 1$. Esta última igualdade diminui em uma unidade o número de componentes independentes da métrica \tilde{g}_{ab} . Note-se que no caso das soluções diagonais de (2.54), possíveis apenas para o caso dos modelos da classe *A* e para o modelo tipo *V* da classe *B*, ver [Bog80] [RS75], só duas das componentes \tilde{g}_{11} , \tilde{g}_{22} e \tilde{g}_{33} são independentes.

Definindo então $b_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \ln(\tilde{g}_{33})$ e $b_2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left(\frac{\tilde{g}_{11}}{\tilde{g}_{33}}\right)$ as equações (2.47) e (2.48) para os modelos de Bianchi da classe *A* diagonais no vazio com constante cosmológica são [RS75] [LW89]⁴

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{1}{2} (\dot{b}_1^2 + \dot{b}_2^2) + \frac{1}{a^2} V(b_1, b_2) + \Lambda \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \ddot{b}_1 + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{b}_1 + \frac{1}{a^2} \frac{\partial V}{\partial b_1} &= 0 \\ \ddot{b}_2 + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{b}_2 + \frac{1}{a^2} \frac{\partial V}{\partial b_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde a coordenada temporal volta a ser t e o potencial V tem a forma, para cada modelo,

$$\begin{aligned} V_I(b_1, b_2) &= 0 \\ V_{II}(b_1, b_2) &= \frac{3}{4} e^{\frac{1}{\sqrt{3}}(2\sqrt{2}b_1 + b_2)} \\ V_{VI_0}(b_1, b_2) &= \frac{1}{3} e^{2\sqrt{\frac{2}{3}}b_1} \\ V_{VII_0}(b_1, b_2) &= \frac{3}{2} e^{2\sqrt{\frac{2}{3}}b_1} \left[\cosh(2\sqrt{2}b_2) - 1 \right] \end{aligned}$$

⁴As variáveis usadas nestas referências são $\beta_+ = \sqrt{6}b_1$ e $\beta_- = \sqrt{6}b_2$.

$$\begin{aligned}
V_{VIII}(b_1, b_2) &= 3e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}b_1} \cosh(\sqrt{2}b_2) + \frac{3}{4}e^{-4\sqrt{\frac{2}{3}}b_1} \\
&\quad + \frac{3}{2}e^{2\sqrt{\frac{2}{3}}b_1} \left[\cosh(2\sqrt{2}b_2) - 1 \right] \\
V_{IX}(b_1, b_2) &= -3e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}b_1} \cosh(\sqrt{2}b_2) + \frac{3}{4}e^{-4\sqrt{\frac{2}{3}}b_1} \\
&\quad + \frac{3}{2}e^{2\sqrt{\frac{2}{3}}b_1} \left[\cosh(2\sqrt{2}b_2) - 1 \right].
\end{aligned}$$

No caso do modelo de Bianchi VI_0 existe a integral primeira $b_2a^3 = c_2$ e no caso do modelo de Bianchi I existem as integrais primeiras

$$\begin{aligned}
b_1a^3 &= c_1 \\
b_2a^3 &= c_2
\end{aligned} \tag{2.59}$$

que se obtêm directamente de (2.58), onde c_1 e c_2 são duas constantes. Sobre a dinâmica deste sistema de equações consultar [Wal83] e [WE97].

Mais adiante voltar-se-á a analisar estas equações do ponto de vista da sua semelhança com as equações das teorias escalares tensoriais.

Capítulo 3

Modelos cosmológicos e inflação

Os modelos cosmológicos actuais baseiam-se na ideia que o universo é essencialmente uniforme por toda a parte [Lyt93] [MTW73]. Na realidade as observações indicam que a distribuição de matéria no universo é relativamente homogénea a larga escala por oposição ao que se observa a pequenas escalas. Estas irregularidades a pequenas escalas correspondem a uma hierarquia de estruturas. Uma das questões a que a cosmologia tem de responder é o facto de o universo ser, a larga escala, homogéneo e isotrópico. O modelo cosmológico padrão explica a expansão actual do universo, a abundância relativa dos elementos leves e as origens da radiação cósmica de fundo. Embora este modelo tenha muito sucesso não explica a origem da estrutura no universo e apesar da relativa homogeneidade ser bem explicada por um período de inflação suficientemente longo o processo pelo qual se impõe $\ddot{a} > 0$ não é conhecido detalhadamente. O estudo qualitativo dos modelos de FLRW, para além de fundamentar o modelo cosmológico padrão, fornece as bases para a discussão destas ideias. Assim, neste capítulo far-se-á o estudo da dinâmica dos modelos de FLRW com um fluido perfeito, através de um formalismo hamiltoniano, e no fim estudar-se-á a dinâmica destes modelos com um campo escalar. Este último estudo é essencial para se compreender, em geral, as condições necessárias para que ocorra um período de inflação em potenciais de tipo de duplo-poço [CMN99]. Far-se-á uma discussão sobre inflação com e sem “slow-roll”.

3.1 Modelos de FLRW

Estes modelos são baseados em três propriedades fundamentais [MTW73] [D’I95]: a de homogeneidade espacial, a de isotropia e a de curvatura constante. A métrica genérica para estes modelos pode ser escrita como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right) \quad (3.1)$$

onde k é uma constante arbitraria. Note-se que a substituições $k \rightarrow \frac{k}{|k|}$, $r \rightarrow r\sqrt{|k|}$ e $a \rightarrow \frac{a}{\sqrt{|k|}}$ deixam a métrica (3.1) invariante o que permite normalizar o valor da curvatura k que passa tomar os valores $-1, 0, +1$. Estes modelos possuem propriedades muito diferentes consoante o valor da sua curvatura.

Existem duas maneiras distintas de se obter as equações de E para estes modelos. A primeira é usar as equações gerais (2.47) e (2.50) com $\sigma_{ab} = 0$ e curvatura constante $P = 6\frac{k}{a^2}$; a segunda é calcular, a partir da métrica (3.1), as quantidades relevantes para o seu estudo ¹. Em ambos os casos obtém-se para o tensor de Ricci

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (3.2)$$

$$R_{ij} = \delta_j^i \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} \right). \quad (3.3)$$

O escalar curvatura vem

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right). \quad (3.4)$$

O tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ é

$$\begin{aligned} G_{00} &= 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \\ G_{ij} &= -\delta_{ij} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

As equações de E, na forma (2.22) com constante cosmológica, ficam então

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} - \Lambda = \rho \quad (3.6)$$

$$\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2} - \Lambda = -p, \quad (3.7)$$

onde ρ é a densidade de energia e p a pressão.

A identidade de Bianchi, $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, escreve-se

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt}(a^3) = 0. \quad (3.8)$$

Note-se que só duas das três equações (3.6), (3.7) e (3.8) são independentes já que derivando (3.6) em ordem ao tempo, multiplicando (3.7) por $-3\frac{\dot{a}^2}{a^2}$ e somando obtém-se (3.8).

Se admitirmos a equação de estado para a matéria

$$p = (\gamma - 1)\rho, \quad (3.9)$$

¹Foi usada a biblioteca para o MapleV3 GRTii

onde $0 \leq \gamma \leq 2$, a equação de conservação da energia (3.8) fica

$$\dot{\rho} + \rho\gamma \frac{d}{dt}(a^3) = 0 \quad (3.10)$$

que integrando dá

$$\rho = \rho_0 a_0^{3\gamma} a^{-3\gamma} \quad (3.11)$$

onde ρ_0 e a_0 são respectivamente a densidade de energia e o o factor de escala no instante inicial. Note-se que as condições iniciais ρ_0 e a_0 têm que satisfazer (3.6). É conveniente escrever $\mu = \rho_0 a_0^{3\gamma}$. A cada valor de γ corresponde um tipo de matéria bem determinado cujas propriedades são descritas por (3.9). Tem-se então os seguintes casos fisicamente mais relevantes: $\gamma = 4/3$ corresponde a radiação, $\gamma = 1$ corresponde a matéria incoerente, $\gamma = 0$ corresponde ao vácuo e $\gamma = 2$ a um fluido rígido.

As equações (3.6) e (3.7) podem ainda ser escritas de outra maneira. Derivando a equação (3.6) em ordem ao tempo obtém-se

$$6 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} - 6 \frac{k}{a^2} \frac{\dot{a}}{a} = \dot{\rho} \quad (3.12)$$

e de (3.10)

$$\dot{\rho} = -3\gamma \frac{\dot{a}}{a} \rho \quad (3.13)$$

que substituindo na primeira dá usando (3.6)

$$-3 \frac{\ddot{a}}{a} = -\Lambda + \left(\frac{3\gamma}{2} - 1 \right) \rho. \quad (3.14)$$

A equação (3.6) é a equação de conservação da energia para a métrica de FLRW. Se definirmos o momento conjugado do factor de escala a como $P_a = 4\dot{a}a$ as equações (3.6) e (3.7) podem ser obtidas do hamiltoneano, para qualquer γ usando (3.11),

$$\mathcal{H} = \frac{P_a^2}{8a} + 2ka - \frac{2}{3}\Lambda a^3 - \frac{2}{3}\mu a^{-3\gamma+3}. \quad (3.15)$$

As equações do movimento ficam

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_a} = \frac{P_a}{4a} \\ \dot{P}_a &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} = \frac{P_a^2}{8a^2} - 2k + 2\Lambda a^3 + 2(-\gamma + 1)a^{-3\gamma+2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

com a restrição $\mathcal{H}(a, P_a) = 0$.

Redefinindo a escala de tempo por $\frac{d}{dt'} = 4a \frac{d}{dt}$ o hamiltoneano fica

$$\mathcal{H}(a, P_a) = \frac{P_a^2}{2} + 8ka^2 - \frac{8}{3}a^4\Lambda - \frac{8}{3}\mu a^{-3\gamma+4}. \quad (3.17)$$

Note-se que o termo da constante cosmológica equivale a um termo de um fluido com $\gamma_\Lambda = 0$ (é usual falar-se em energia do vácuo quando se quer referir ao termo da constante cosmológica) e o termo da curvatura ao de um fluido com $\gamma_k = 2/3$.

As equações de E para os modelos de FLRW ficam

$$\begin{aligned} a' &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_a} = P_a \\ P'_a &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} = -16ka + \frac{32}{3}a^3\Lambda + \frac{8}{3}(-3\gamma + 4)\mu a^{-3\gamma+3} \end{aligned} \quad (3.18)$$

mais a restrição hamiltoniana $\mathcal{H}(a, P_a) = 0$.

Os modelos de FLRW têm dois tipos de comportamentos básicos. Um comportamento de expansão-colapso em que o factor de escala oscila entre zero e um valor máximo finito que será designado por (C) e um comportamento de expansão (E) onde o factor de escala cresce e tende para infinito quanto o tempo tende para infinito.

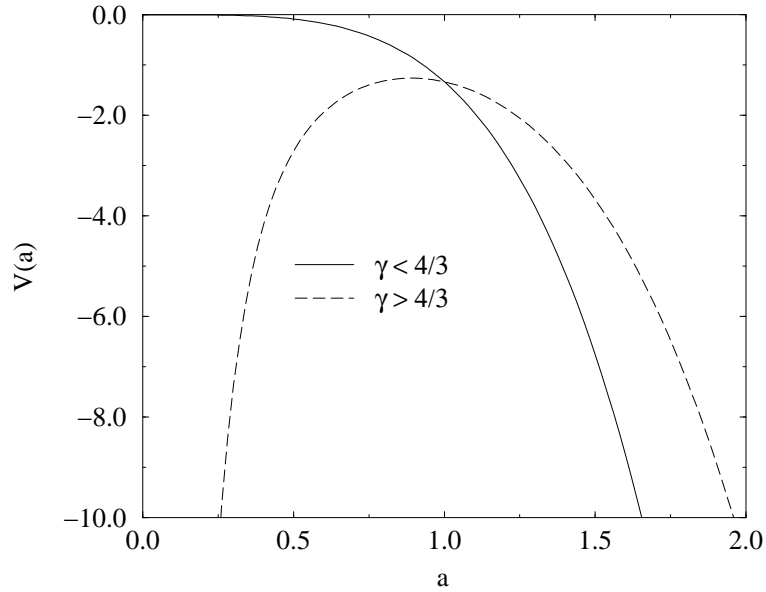


Figura 3.1: Gráfico do potencial $V(a)$ para valores típicos do parâmetro γ para $k = 0$ (para traçar o gráfico pôs-se $\gamma = 0, 2$).

Dentro da classe de soluções de expansão (E) do sistema com hamiltoniano (3.17) chamam-se soluções de inflação (I) aquelas que verificam $\ddot{a} > 0$ durante algum período de tempo. Note-se que da equação (3.14) se conclui que se $\Lambda = 0$ então as soluções de inflação são aquelas em que $\gamma < 2/3$. Por outro lado se $\Lambda \neq 0$ existem soluções de inflação sempre que $\gamma < 2/3$ para um valor da constante cosmológica arbitrário positivo e para $\gamma > 2/3$ para Λ suficientemente grande comparado com ρ . Assim, para $\Lambda > 0$ qualquer solução de expansão tem $\ddot{a} > 0$

assimptoticamente e, portanto, são soluções do tipo (I). As soluções têm no passado dois comportamentos distintos colapso e expansão que por simplicidade se omitem já que se quer determinar qual o comportamento assintótico futuro das soluções. Vai supor-se sempre que $a'_0 > 0$.

3.1.1 Comportamento qualitativo dos modelos de FLRW

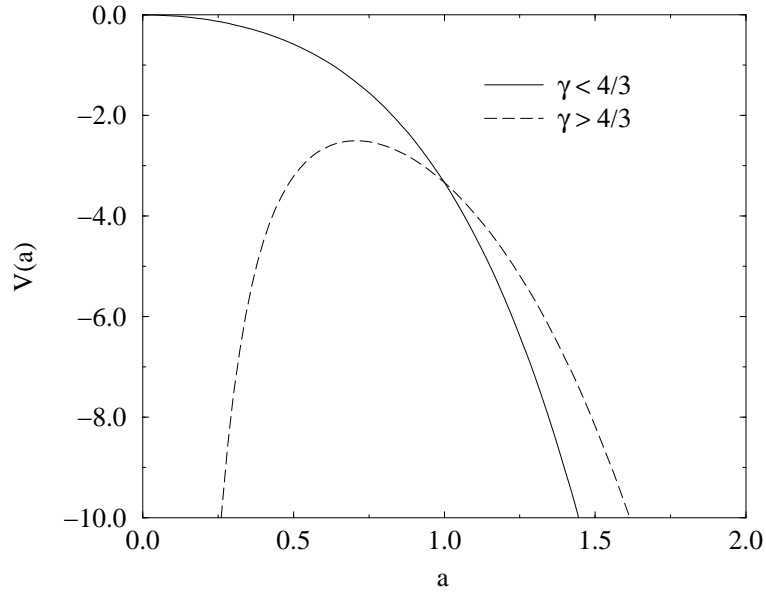


Figura 3.2: Gráfico do potencial $V(a)$ para valores típicos do parâmetro γ para $k = -1$ (para traçar o gráfico pôs-se $\gamma = 0, 2$).

A análise qualitativa dos modelos FLRW é feita simplesmente com a integral primeira $\mathcal{H}(a, P_a) = 0$ que se volta a escrever

$$\frac{P_a^2}{2} + 8ka^2 - \frac{8}{3}a^4\Lambda - \frac{8}{3}\mu a^{-3\gamma+4} = 0. \quad (3.19)$$

Como o hamiltoneano tem energia cinética com a forma canónica $\frac{P_a^2}{2}$ o comportamento qualitativo pode ser imediatamente obtido da forma do potencial $V(a) = 8 \left(ka^2 - \frac{1}{3}a^4\Lambda - \frac{1}{3}\mu a^{-3\gamma+4} \right)$ com o estudo dos seus pontos críticos e sinal. Vai-se sempre considerar $\Lambda > 0$ (o caso $\Lambda = 0$ será considerado mais tarde).

Os casos dos modelos com $k = -1, 0$ são fáceis de estudar. Repare-se que para estes valores da curvatura para qualquer valor de $\gamma \leq \frac{4}{3}$ se tem sempre $V(a) \leq 0$ e que o único ponto crítico é $a = 0$. Assim dada uma condição inicial a_0 positiva as soluções são de expansão do tipo (I). Ver Figuras (3.1) e (3.2). Por outro lado

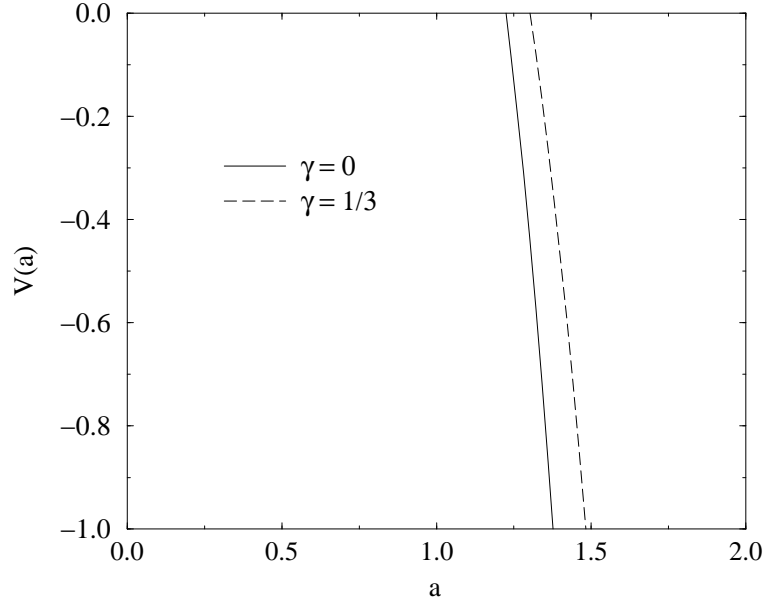


Figura 3.3: Gráfico do potencial $V(a)$ para valores típicos do parâmetro $0 \leq \gamma < 2/3$ para $k = 1$.

se $\gamma > \frac{4}{3}$ o potencial $V(a)$ é singular para $a = 0$ e tem um ponto crítico positivo, a_c , com $V(a_c) < 0$. Portanto, dada uma condição inicial a_0 positiva as soluções são de expansão do tipo (I).

O estudo para o caso $k = 1$ é feito através da divisão do intervalo de variação de γ em sub-intervalos $[0, 2/3[$, $\{2/3\}$, $]2/3, 4/3[$, $\{4/3\}$ e $]4/3, 2]$. Repare-se que para $\gamma < \frac{4}{3}$ se tem $V(0) = 0$ para qualquer valor de μ e Λ . Assim tem-se os subcasos seguintes:

Caso I

1. Para γ pertencente ao intervalo $[0, 2/3[$ tem-se $V(a) < 0$ se e só se a superior a um determinado valor crítico a_c . Portanto, para condições iniciais $a_0 > a_c$ as soluções são do tipo (I). Veja-se Figura (3.3).
2. Para $\gamma = 2/3$ e $\mu \geq 3$ não existe nenhum ponto crítico para além de $a = 0$ e o estudo deste caso é análogo ao caso $\gamma < 4/3$ e $k \neq 1$ (Ver Figura (3.1) e (3.2)). Para $\mu < 3$ o potencial $V(a)$ tem um comportamento qualitativo semelhante ao caso $k = 1$ e $0 \leq \gamma < 2/3$. Neste último caso, só são acessíveis condições iniciais superiores a um determinado valor do factor de escala e portanto estas soluções são de expansão do tipo (I).
3. Para γ pertencente ao intervalo $]2/3, 4/3[$ tem-se $V' \leq 0$ e $V \leq 0$ numa vizinhança da origem o que torna possível a existência de órbitas de colapso (ver

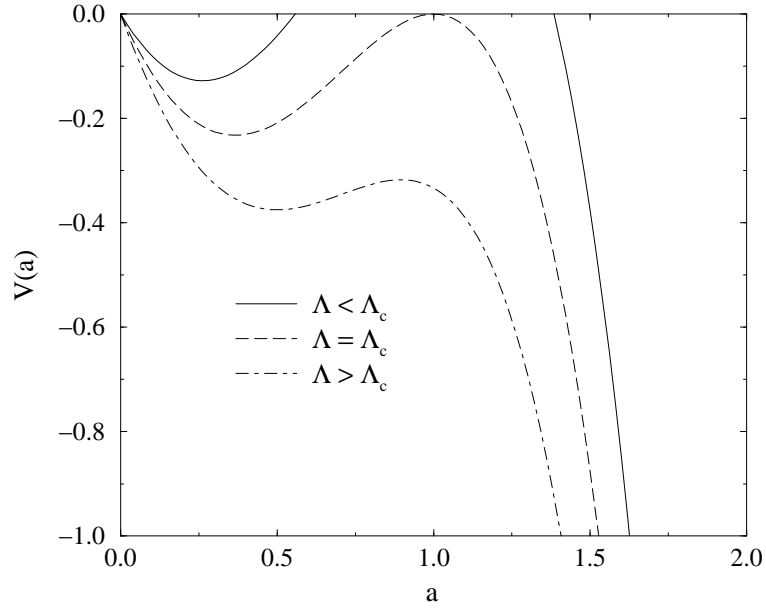


Figura 3.4: Gráfico do potencial $V(a)$ para $2/3 < \gamma < 4/3$ para $k = 1$.

Figura (3.4)). Nestes casos existe um valor crítico da constante cosmológica $\Lambda_c(\gamma)$, que depende de γ , tal que: se $\Lambda > \Lambda_c$ tem-se $V(a) \leq 0$ logo todas as soluções são de expansão do tipo (I); se $\Lambda \leq \Lambda_c$ existem duas regiões de condições iniciais acessíveis situadas uma à esquerda do máximo de V e outra à direita; para condições iniciais a_0 à esquerda deste máximo que verifiquem $V(a_0) \leq 0$ as solução são do tipo (C), para as condições iniciais à direita deste máximo que verifiquem $V(a_0) \leq 0$ as solução são do tipo (I).

4. Para $\gamma = \frac{4}{3}$ o potencial fica com a forma $V(a) = 8ka^2 - \frac{8}{3}a^4\Lambda - \frac{8}{3}\mu$ com pontos críticos $a = 0$ e $a_c = \sqrt{3/2\Lambda}$. O comportamento qualitativo de $V(a)$ é o da Figura (3.5). Existe um valor crítico da constante cosmológica $\Lambda_c = 9/4\mu$ para o qual se tem $V(a_c) = 0$. Assim para $0 < \Lambda < \Lambda_c$ e se $a_0 < a_c$ as soluções são do tipo (C) e se $a_0 > a_c$ do tipo (I). Por outro lado se $\Lambda > \Lambda_c$ então, dada uma condição inicial tal que $V(a_0) \leq 0$, as soluções são do tipo (I).

Caso II

Para valores de γ no intervalo $]4/3, 2]$ o potencial $V(a)$ tem apenas um ponto crítico $a_c > 0$. Tem-se dois comportamentos distintos consoante os valores da constantes Λ e μ . Se $V(a_c) > 0$ então dada uma condição inicial $a_0 < a_c$ as soluções são do tipo (C) e dada uma condição inicial $a_0 > a_c$ as soluções

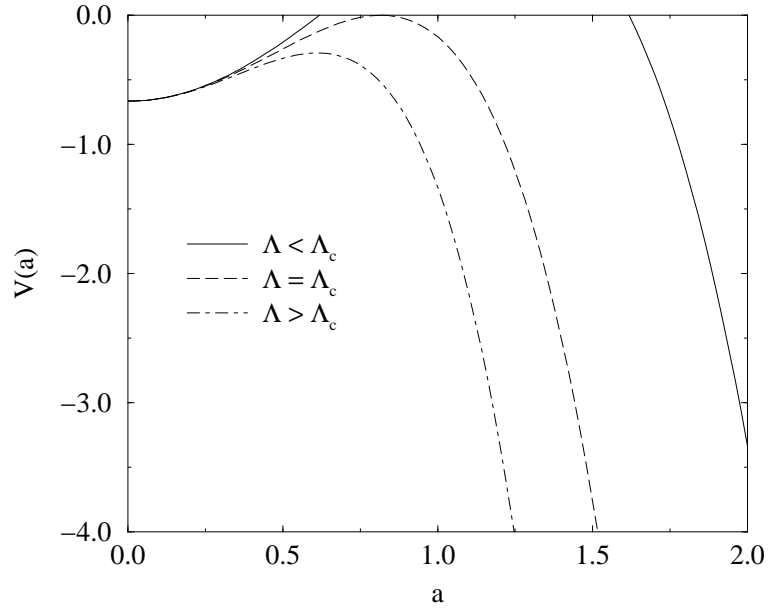


Figura 3.5: Gráfico do potencial $V(a)$ para valores típicos do parâmetro $\gamma = 4/3$ para $k = 1$.

são do tipo (I). Ver Figura (3.6). Se $V(a_c) < 0$ todas as soluções são do tipo (I) por analogia com o caso $k \neq 1$ e $\gamma > 4/3$.

3.1.2 O atrator de de Sitter

O atrator de de Sitter define-se como sendo a solução de inflação em que $\dot{a}/a = cte$, *i.e.*, o factor de escala tem um comportamento exponencial. Embora a função $a(t)$ desta forma só seja solução das equações (3.18) para $k = \mu = 0$ faz sentido esta designação porque, como se verá, as soluções no caso geral tem, assintoticamente, esta forma analítica. Este tipo de comportamento do factor de escala é essencial para a resolução dos vários problemas cosmológicos [Gut81] e por isso será tratado aqui.

Pelo que foi visto atrás o comportamento para $a \rightarrow +\infty$ é permitido para todos os valores de γ . O estudo de $a \rightarrow +\infty$ faz-se partindo das equações do movimento (3.18) com a mudança de variável $b = \frac{1}{a}$, definindo $v = P_a b^2$ e rescalando o tempo de acordo com $\frac{d}{dt} = \frac{b}{4} \frac{d}{dt'}$ (a escala de tempo volta a ser a original). Fica-se então com

$$\begin{aligned} \dot{b} &= -\frac{1}{4}vb \\ \dot{v} &= -\frac{1}{2}v^2 - 8kb^2 + \frac{8}{3}\Lambda + \frac{8}{3}(-3\gamma + 4)\mu b^{3\gamma} \end{aligned} \quad (3.20)$$

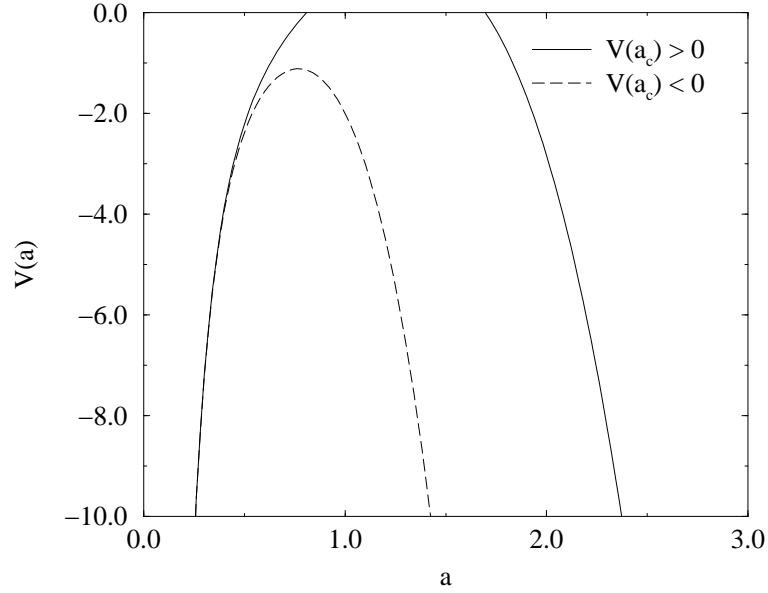


Figura 3.6: Gráfico do potencial $V(a)$ para valores típicos do parâmetro $\gamma = 2$ para $k = 1$.)

e a integral primeira $h = \mathcal{H}b^4$

$$h = \frac{1}{2}v^2 + 8kb^2 - \frac{8}{3}\Lambda - \frac{8}{3}\mu b^{3\gamma} = 0. \quad (3.21)$$

Para $b = 0$ as equações (3.20) reduzem-se a

$$\begin{aligned} \dot{b} &= 0 \\ \dot{v} &= -\frac{1}{2}v^2 + \frac{8}{3}\Lambda \end{aligned} \quad (3.22)$$

e (3.21) reduz-se a $\frac{1}{2}v^2 - \frac{8}{3}\Lambda = 0$ o que implica que assintoticamente v pode tomar apenas um dos valores $v_1 = \sqrt{\frac{4}{3}\Lambda}$ e $v_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}\Lambda}$. É fácil ver que estes valores correspondem aos pontos de equilíbrio no infinito e que $b = 0$ e $v = v_1$, $b = 0$ e $v = v_2$ são, respectivamente, um nó estável e um nó instável do sistema regularizado (3.20).

Repare-se que $v = \frac{P_a}{a^2} = \frac{a'}{a^2} = 4\frac{\dot{a}}{a}$. Logo a equação (3.22) para \dot{v} não é mais do que (3.6) para $b = 1/a = 0$. Portanto a forma assintótica do factor de escala $a(t)$ para tempos positivos é dada pela solução da equação

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda},$$

que é

$$a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda}t} \quad (3.23)$$

a solução de de Sitter.

Para $\Lambda = 0$ tem-se, de (3.14),

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = \left(\frac{3\gamma}{2} - 1\right)\rho.$$

Para $k \neq 1$ o potencial $V(a) \leq 0$ para qualquer γ logo todas as soluções são sempre de expansão e de inflação se $\gamma < 2/3$. Para $k = 1$ se $\gamma < 2/3$ o potencial $V(a)$ tem uma forma análoga ao caso já estudado para $\Lambda \neq 0$ e $k = 1$ com $0 \leq \gamma \leq 2/3$. Se $\gamma > 2/3$ existe um valor do factor de escala a partir do qual $V(a) > 0$ logo, dada uma condição inicial menor que esse valor, todas as soluções são do tipo (C).

O modelo cosmológico padrão é construído através destes tipos de comportamentos, *i. e.*, para as duas últimas épocas da história do universo supõe-se que a dinâmica do factor de escala é controlada por vários tipos de matéria diferentes. Inicialmente por um fluido com $\gamma = 4/3$, radiação e no fim por matéria incoerente em que $\gamma = 1$ [Lyt93] [MTW73]. O modelo padrão prevê correctamente a expansão do universo e a existência da radiação cósmica de fundo. No entanto sofre de algumas dificuldades enunciadas em forma de problemas: o problema do horizonte, o problema da densidade crítica e o problema das singularidades cósmicas. Estes problemas parecem ser resolvidos se se admitir que o universo, na sua evolução, passou durante um período suficientemente longo por um comportamento do tipo de de Sitter (3.23) [Gut81], como se discute a seguir.

3.1.3 Inflação

Quando se refere o modelo cosmológico padrão quer-se dizer um universo em expansão adiabática dominado por radiação ou matéria incoerente e descrito por uma métrica de FLRW com constante cosmológica nula. A evolução do universo depende da resolução das equações (3.6) e (3.10) para as quais são necessárias condições iniciais que descrevem as condições físicas do instante a partir do qual se quer determinar uma solução. No entanto, este modelo assenta em condições iniciais que são muito intrigantes. Em primeiro lugar, repare-se que o modelo cosmológico padrão tem uma singularidade num instante inicial, *i. e.*, um instante, que se toma como o instante inicial físico para a contagem do tempo $t = 0$, em que o factor de escala é igual a zero. Quando $t \rightarrow 0$ o factor de escala $a \rightarrow 0$. Por outro lado quando t é da ordem do tempo de Planck, ou mais pequeno, as equações do modelo cosmológico padrão não descrevem os fenómenos físicos que ocorrem nesses instantes porque existem efeitos quânticos gravitacionais relevantes que não são descritos por elas. Logo, com estes factos em mente, é razoável admitir que o cenário descrito pelo modelo cosmológico padrão só seja verdadeiro

para instantes suficientemente grandes e maiores que o tempo de Planck. Assim, a evolução do universo pode ser determinada a partir das soluções das equações diferenciais ordinárias (3.6) e (3.10) com uma escolha criteriosa de condições iniciais que especificam o cenário físico que existiria num determinado instante.

No modelo cosmológico padrão, o universo é tomado, inicialmente, como sendo homogéneo e isotrópico e com a matéria composta por um gás em equilíbrio térmico com densidade ρ_0 ; o valor inicial H_0 da constante de Hubble, $H = \frac{\dot{a}}{a}$, que mede a taxa de expansão do universo, especifica a velocidade inicial e valor inicial do factor de escala com a equação (3.6), e são estas as condições iniciais suficientes para se obter uma solução das equações (3.6) e (3.10).

O primeiro problema, denominado *problema do horizonte*, pode ser formulado da seguinte maneira: a radiação cósmica de fundo, proveniente de todas as direcções do universo, tem um espectro térmico com temperaturas que diferem apenas de uma parte em 10^{-5} . Se a esta uniformidade se adicionar a homogeneidade do universo a larga escala é-se levado a concluir que todas as regiões do universo se encontravam em contacto causal na época de desacoplamento e que as interacções mutuas entre estas regiões garantiriam o mesmo estado de equilíbrio para todas elas. No entanto, porque as interacções entre cada uma destas regiões são realizadas a uma velocidade menor ou igual à da luz nem todas as regiões tiveram tempo de interactuarem. Assim, de acordo com o modelo cosmológico padrão não existe qualquer forma destas regiões terem interactuado antes da época de desacoplamento. Portanto, ou se admite que o universo era no seu início homogéneo ou estas regiões não têm necessariamente de estar em equilíbrio térmico como se observa. Adiante se verá como a ideia de inflação permite resolver esta dificuldade.

Sabe-se que a densidade de energia ρ do universo tem um valor muito próximo do seu valor crítico. Explicar porque é que isto acontece é o problema da *densidade crítica*. Definindo a densidade de energia total como $\Omega = \frac{\rho}{3H^2}$, com $\Lambda = 0$, é fácil ver a partir de (3.6) e (3.14) que Ω obedece à equação

$$\dot{\Omega} = \frac{\dot{a}}{a}(2 - 3\gamma)\Omega(1 - \Omega) \quad (3.24)$$

Com o estudo qualitativo anterior dos modelos de FLRW com $\Lambda = 0$ é fácil obter-se o comportamento assintótico de Ω (Tabela (3.1)). A equação (3.24) tem pontos de equilíbrio $\Omega = 0, 1$. Repare-se que para $k = 0$ se tem, ver (3.6), $\Omega(t) = 1$. Por outro lado para $k \neq 0$ como de (3.6) vem $1 = \Omega - \frac{k}{H^2 a^2}$ tem-se $\Omega \leq 1$ para $k = -1$ e $\Omega \geq 1$ para $k = 1$. Assim, a curvatura do universo é determinada pelo valor de Ω . Repare-se que $\Omega = 1$ é uma condição muito improvável já que para que assintoticamente se tenha $\Omega = 1$ é necessário que a densidade de energia tenha um valor igual á densidade crítica [EBL⁺99] [HRLG98].

Note-se que um período de suficientemente longo de inflação resolveria este problema impondo $\Omega \simeq 1$ (Tabela (3.1)) porque inflação aplanava o universo.

Apesar de o conceito de inflação ser generalizadamente aceite, não existe ainda um cenário totalmente consistente no qual este tipo de comportamento seja

	$\Omega_{k=-1}$	$\Omega_{k=0}$	$\Omega_{k=1}$
$\gamma < 2/3$	1	1	1
$\gamma = 2/3$	Ω_0	1	Ω_0
$\gamma > 2/3$	0	1	$+\infty$

Tabela 3.1: Classificação dos comportamentos assintóticos de Ω para os modelos de FLRW para os vários tipos de curvatura e matéria sob um ramo de expansão $\dot{a}/a > 0$ (Ω_0 é uma condição inicial).

possível. O mecanismo pelo qual se impõe $\ddot{a} > 0$ durante um período suficientemente longo de tempo não é conhecido de um ponto de vista físico. A versão mais simples é a de considerar um campo escalar ϕ [L⁺97], denominado inflatão, cuja dinâmica originaria as pressões negativas necessárias para impor $\ddot{a} > 0$. O conceito de inflação para além de fornecer uma justificação para a relativa homogeneidade observada do universo, permite também, a partir da introdução de um campo escalar, interpretar as anisotropias da radiação de fundo de uma maneira muito natural. Os detalhes deste processo dependem da forma do potencial a que estaria sujeito este campo.

Inflação é definida como o período de tempo durante o qual o factor de escala tem um crescimento acelerado e portanto $(aH)^{-1} = \frac{1}{\dot{a}}$ é decrescente durante este período. Esta quantidade, denominada raio de Hubble, representa o limiar da escala de influência causal. Por outro lado a importância de uma determinada perturbação da métrica depende da relação entre o seu comprimento de onda e a escala característica do universo $(aH)^{-1}$. Assim, fenómenos cujas escalas características escalem com o factor de escala, como é o caso do comprimento de onda das perturbações da métrica originadas por um campo escalar, saem deste horizonte causal à medida que a inflação decorre. O período de inflação acaba quando $(aH)^{-1}$ começar a aumentar e as perturbações podem entrar então no horizonte causal. Assim, um período de inflação durante a época de radiação permitiria “congelar” as perturbações de grandes comprimentos de onda, evitando a sua dissipação, e permitindo a sua reentrada mais tarde na época galáctica, ou pré-galáctica, influenciando directamente os processos de formação de estrutura. A confirmação observacional do mecanismo descrito anteriormente pode ser encontrado na anisotropia da radiação cósmica de fundo, que assinala a existência da época de desacoplamento, e que pode ser relacionada com a amplitude de perturbações escalares da métrica [MFB92] [L⁺97].

As equações que descrevem a dinâmica do campo ϕ são

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (3.25)$$

A equação de E, $G_{00} = T_{00}$, fica

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (3.26)$$

e de $G_{ab} = T_{ab}$ vem

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.27)$$

e substituindo (3.26) em (3.27) fica

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.28)$$

À semelhança do caso de fluido perfeito, definido pela equação de estado (3.9), pode-se definir formalmente um $\gamma_\phi(t)$ função do tempo, ao contrário do que acontecia com o caso do fluido em que γ é uma constante, com a forma

$$\gamma_\phi = 2\frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2}}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)} \quad (3.29)$$

que é o dobro da razão entre a energia cinética e a energia total do campo e onde

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.30)$$

é a densidade de energia e

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3.31)$$

a pressão. Repare-se que com estas definições se obtém

$$p_\phi = (\gamma_\phi - 1)\rho_\phi. \quad (3.32)$$

Note-se que sempre que $V(\phi) = 0$ se tem $\gamma_\phi = 2$ (fluido rígido) e sempre que $\dot{\phi} = 0$, $\gamma_\phi = 0$ (vácuo). A repartição de energia entre energia potencial e cinética fornece um processo simples de garantir uma aceleração positiva do factor de escala $\ddot{a} > 0$ (3.28), durante um certo período, já que a equação da dinâmica do campo (3.25) poderá ter soluções oscilatórias. A analogia formal entre a dinâmica de um campo escalar e um fluido perfeito pode ainda ser levada mais longe se se reparar que a equação (3.28) se pode escrever como (3.14) na forma

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = \left(\frac{3\gamma_\phi}{2} - 1\right)\rho_\phi. \quad (3.33)$$

Considere-se as equações (3.25) e (3.26). Os casos mais fáceis de estudar são o de curvatura nula e de curvatura negativa. Repare-se que da equação (3.26) se conclui que para $\dot{a}_0 > 0$ se tem sempre $\dot{a}(t) > 0$ porque $V(\phi) > 0$ e \dot{a} só se anulará para $a = +\infty$. Logo, para estes dois casos não se espera um comportamento muito complicado das soluções, ao contrário do que acontece para o caso de curvatura positiva, porque nestes casos o factor de escala é um função monótona do tempo. Note-se ainda que o sistema de equações diferenciais de quarta ordem definido

pelas equações (3.28) e (3.25) não contêm nenhum termo com a curvatura. Como a equação (3.26) é uma integral primeira destas equações a influência do termo de curvatura só se reflecte na escolha das condições iniciais que têm, como seria de esperar, de verificar (3.26).

É fácil ver que para o caso de curvatura nula as equações (3.25) e (3.26) se desacoplam. Este é também o caso que melhor se ajusta aos dados observacionais [P⁺98]. Assim, como se quer estudar soluções de expansão, *i. e.*, soluções em que $\frac{\dot{a}}{a} > 0$, fica-se com

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\phi}\sqrt{\rho_\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (3.34)$$

onde $\rho_\phi = \rho_\phi(\phi, \dot{\phi})$ é a energia do campo ϕ definida por (3.30).

Uma escolha possível para o potencial $V(\phi)$ é a de uma função com máximos e mínimos. Os candidatos mais simples são funções do tipo duplo poço. Concretamente os potenciais

$$V_{d-p}(\phi) = \frac{A}{B^2} (\phi^2 - B)^2 \quad (3.35)$$

$$V_{NG}(\phi) = A \left[1 + \cos \left(\frac{\pi\phi}{\sqrt{B}} \right) \right] \quad (3.36)$$

onde A e B são duas constantes reais positivas. V_{d-p} é o potencial de duplo poço usual e V_{NG} um potencial com relevância para as teorias de partículas [FFO90].

A abordagem popular é a de considerar a hipótese *ad hoc* que o campo desce lentamente o potencial aproximando-se de um dos mínimos; este comportamento é designado por “slow-roll” e será a designação usada sempre que necessário. A hipótese de “slow-roll” pode ser descrita facilmente. Na maioria dos casos na literatura, veja-se a título de exemplo [FFO90] [LM98], considera-se sempre potenciais quadráticos com o coeficiente quadrático suficientemente grande para que, com a hipótese de “slow-roll”, se consiga satisfazer as restrições a que um modelo inflacionario tem que satisfazer. Supõe-se que o campo desce o potencial com $\frac{\ddot{\phi}a}{\dot{a}\dot{\phi}} \ll 1$ e $\frac{\dot{\phi}^2}{V(\phi)} \ll 1$. Esta desigualdade significa simplesmente que $\gamma_\phi \simeq 0$ (3.29).

É fácil ver, a partir de (3.33), que se tem $\ddot{a} > 0$ e que o factor de escala tem um crescimento exponencial. O período de inflação acaba quando $\dot{\phi}^2 = V(\phi)$ e o campo oscila harmonicamente em torno do mínimo. Apesar desta explicação estar essencialmente correcta impõe inicialmente o comportamento de “slow-roll”. Esta hipótese é altamente restritiva ao ponto de, em particular, dar origem ao mesmo tipo de comportamento independentemente da forma do potencial, e para além disso, obriga a um refinamento exagerado das condições iniciais. Fica em aberto, dado um potencial, a determinação do conjunto de condições iniciais que dão origem a este tipo de comportamento.

O ponto de partida para o estudo que se segue é analisar a dinâmica de todas as soluções e determinar o conjunto de todas as condições iniciais que dão origem

a um comportamento de “slow-roll”. Verifica-se que só as soluções que têm um comportamento de “slow-roll” durante um certo período de tempo verificam as restrições inflacionárias e que é possível especificar as condições iniciais sem um refinamento exagerado. Assim, esta hipótese, usualmente considerada como essencial, é consequência da imposição dos dados observacionais, para os potenciais considerados, ao modelo e não o recíproco.

Repare-se que a equação (3.34) é uma equação de um oscilador não linear, não-linearmente amortecido. É fácil descrever qualitativamente as soluções de (3.34). No caso do potencial de duplo poço existem três pontos de equilíbrio: uma sela em $(\phi, \dot{\phi}) = (0, 0)$ e dois focos estáveis em $(\phi, \dot{\phi}) = (\pm\sqrt{B}, 0)$. As variedades estáveis do ponto sela dividem o plano em duas regiões I e II. Um dos focos atrai todos os pontos em I enquanto o outro atrai todos os pontos em II (ver Figura (3.8)). Como não existe nenhuma sensibilidade das soluções em relação às condições iniciais, exceptuando as fronteiras das regiões I e II, é possível efectuar um estudo numérico exaustivo no espaço dos parâmetros e das condições iniciais para encontrar as regiões cujas soluções satisfazem as restrições observacionais. Do ponto de vista qualitativo o caso do potencial V_{NG} é idêntico ao caso do potencial de duplo-poço pela identificação dos dois focos estáveis.

É usual definir-se os parâmetros de “slow-roll” [L⁺97]

$$\epsilon(t) = \frac{3}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)} \quad (3.37)$$

$$\eta(t) = -\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \quad (3.38)$$

Inflação corresponde a $\epsilon < 1$. Repare-se, ver (3.29,) que $\epsilon = \frac{3}{2}\gamma_\phi$. O regime de “slow-roll” é definido por [L⁺97]:

1. $\epsilon(t) \ll 1$ - que é a condição para desprezar o termo cinético em (3.34)
2. $\eta(t) \ll 1$ - que é a condição para desprezar o termo de aceleração em (3.34)

Para resolver os problemas cosmológicos os modelos inflacionários têm que satisfazer as seguintes condições [L⁺97] [FFO90]

1. *Suficiente inflação*: O factor de escala tem que satisfazer

$$N = \int_{t_i}^{t_f} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dt = \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right) \geq 60. \quad (3.39)$$

O número N é designado na literatura como o número de “e-foldings” porque se $N = \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right)$ então a relação entre a_f e a_i pode ser escrita à custa da função exponencial como $a_f \geq a_i e^{60} \geq a_i 10^{26}$. Toma-se assim, daqui para a frente, esta designação.

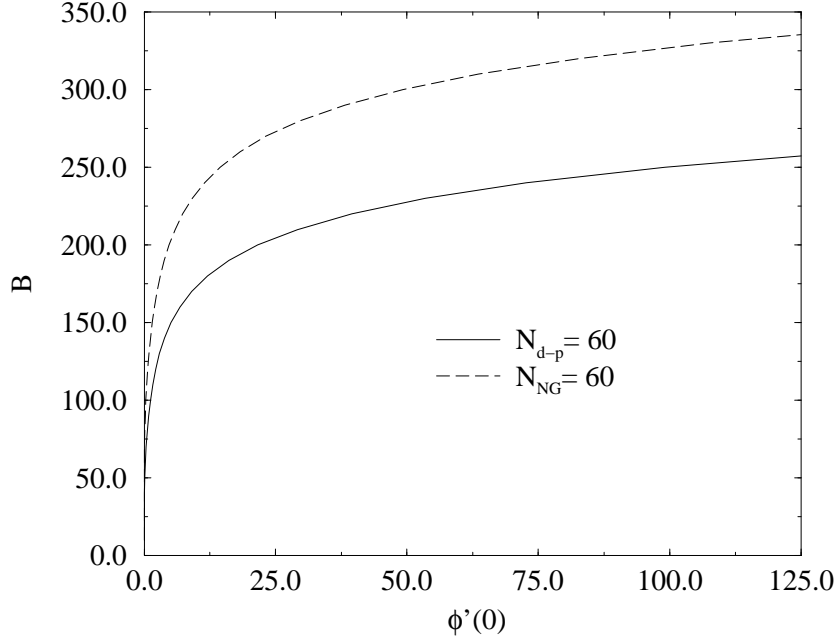


Figura 3.7: Fronteira da região admissível no espaço de parâmetros (região superior ao gráfico) para a restrição (3.39) do número de “e-foldings” para o duplo poço e NB. O limite superior nas abscissas está em 10^5 .

Repare-se que neste caso o número de “e-foldings” é simplesmente igual a

$$N = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\rho_\phi(\phi(t), \dot{\phi}(t))} dt = \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) + V(\phi(t)) \right]^{1/2} dt. \quad (3.40)$$

Note-se ainda que $\frac{\dot{a}}{a}$ pode ser escrito, para qualquer valor da curvatura, como

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{1}{3\dot{\phi}^2} \frac{d}{dt} \left[\rho_\phi(\phi(t), \dot{\phi}(t)) \right]. \quad (3.41)$$

Apesar desta restrição não ser obtida directamente das observações ela é essencial já que todas as outras restrições observacionais a tomam como hipótese.

2. *Limites para a energia do campo:* (ver [L⁺97] e [FFO90] e referências incluídas) O regime de inflação ocorre na gama de energias entre m_{pl} e $10^{-17} m_{pl}$. Isto restringe a dinâmica no espaço de fase à região ² definida por

$$10^{-34} m_{pl}^2 \leq \rho_\phi(\phi, \dot{\phi}) \leq m_{pl}^2. \quad (3.42)$$

²Estes limites são admitidos para que a inflação ocorra entre o instante de Planck e a transição electro-fraca [FFO90]. Para o estudo numérico faz-se $m_{pl} = 1$.

3. *Perturbações escalares:* (ver [L⁺97] e [FFO90] e referências incluídas) As anisotropias da radiação cósmica de fundo limitam a amplitude das flutuações escalares δ por

$$\delta \leq \delta^{obs} = 1,9 \times 10^{-5} \quad (3.43)$$

onde δ^{obs} é o valor observacional.

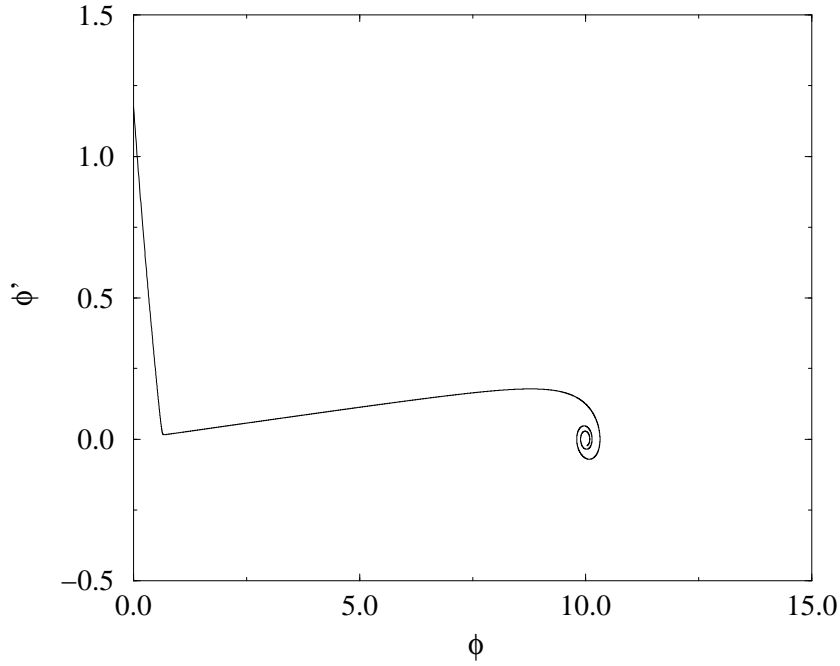


Figura 3.8: Órbita típica de “slow-roll” com $B = 100$ e condições iniciais $\phi(0) = 0$ e $\phi'(0) = 1.17334$ para o potencial duplo-poço. Para NB é análogo.

Crê-se que a escala característica destas perturbações se tornam maiores do que o raio de Hubble 50 “e-foldings” antes do fim da inflação [Lyt93] [L⁺97]. Note-se que a amplitude de perturbações escalares tem a forma (A.21), (ver apêndice A) [L⁺97] [MFB92],

$$\delta \simeq \frac{\dot{a}^2}{a^2 |\dot{\phi}|} \quad (3.44)$$

sempre que os parâmetros de “slow-roll” ϵ e η são constantes no tempo. Assim assumindo que ϵ e η satisfazem a hipótese anterior é fácil de ver que com a transformação da variável independente $t \rightarrow t' = \sqrt{A}t$ se tem

$$\delta(A) = \sqrt{A}\delta(1) \quad (3.45)$$

e que de (3.40) se obtém

$$N(A, B) = N(1, B). \quad (3.46)$$

É fácil ver, a partir de (3.41), que esta propriedade para o número de “e-foldings” se mantém válida para $k = -1, 1$ e que é válida em geral para qualquer potencial para o rescalamento do parâmetro de amplitude A .

Portanto a restrição (3.43) pode ser satisfeita rescalando δ por \sqrt{A} depois de se ter determinado todos os parâmetros. Como $\delta(1)$ é determinado 50 “e-foldings” antes do fim de inflação, o valor de A é determinado por $\sqrt{A} \leq \mathcal{O}(10^{-5})/\delta(1)$. Fica-se assim com a restrição no número de “e-foldings” por satisfazer. Pondo $\phi(0) = 0$ fica-se apenas com dois parâmetros ($B, \phi'(0)$). Esta imposição não tem grande importância porque o parâmetro relevante é a energia inicial do campo que pode ser sempre controlada pela velocidade inicial.

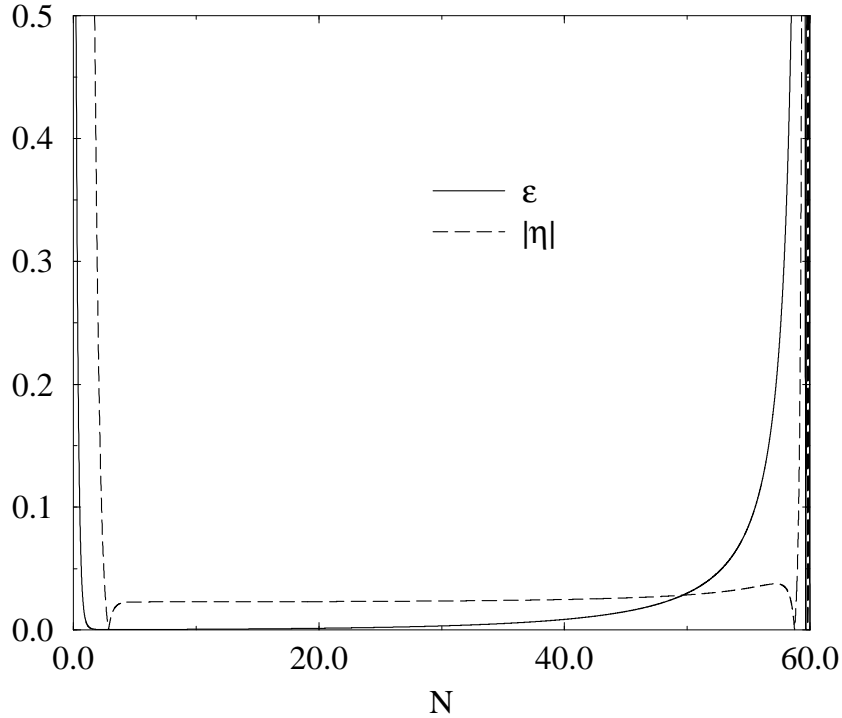


Figura 3.9: Parâmetros de “slow-roll” ao longo de uma órbita (ver Figura anterior).

A restrição (3.42) define uma região no espaço de fase. A abordagem usual é a de considerar condições iniciais com energia menor ou igual á energia de quebra de simetria A . A abordagem feita aqui é a de considerar condições iniciais com energias maiores ou iguais a A . Isto tem com consequência evitar o refinamento exagerado dos parâmetros que controlam cada órbita, o parâmetro B e as condições iniciais, porque estas órbitas têm contribuições adicionais para o número de

“e-foldings” por comparação com aquelas usualmente consideradas na literatura [FFO90] [LM98] [L⁺97]. O problema fica então reduzido a determinar $\phi'(0)$ no intervalo de energias admissíveis e o valor da constante B tal que $N(1, B) > 60$.

Os resultados são os da Figura (3.7). Vê-se que a restrição (3.39) é satisfeita numa grande região do espaço de parâmetros (região acima do gráfico). Verifica-se também que para todos estes os valores dos parâmetros os quantidades ϵ e $|\eta|$, assim como as suas derivadas, são muito menores do que 1. Portanto, a aproximação de “slow-roll” é válida. Na Figura (3.8) mostra-se um órbita típica de “slow-roll” e na Figura (3.9) o comportamento típico dos parâmetros de “slow-roll” ao longo da mesma. Note-se a particularidade desta órbita, em relação ao que seria de esperar de um órbita de não de “slow-roll”. Na órbita de “slow-roll” tem-se $|\phi'| \ll 1$ durante num grande período de tempo obrigando a $\gamma_\phi \ll 2/3$.

Isto mostra que não é possível, para estes potenciais, satisfazer as restrições inflacionarias sem “slow-roll”. De facto os resultados numéricos do estudo global no espaço de parâmetros (B, ϕ) mostram que as órbitas de não “slow-roll” também não satisfazem a restrição (3.39) do número de “e-foldings”. A ideia fundamental que subsiste é a de que, de facto, o regime de “slow-roll” é forçado pelas restrições observacionais no cenário geral de potenciais que exibem quebra de simetria ou vários extremos. Assim, dada uma condição inicial fora do poço de potencial, para um potencial com vários extremos, o sistema após um regime transiente evolui aproximando-se do poço de potencial onde oscilará em torno do mínimo. Este estágio relevante é modelado por um potencial com dois extremos consecutivos, com condições iniciais superiores à energia correspondente ao máximo. Como se pode ver na Figura (3.8), a energia do sistema decresce rapidamente devido ao amortecimento e o sistema aproxima-se do mínimo e por fim oscila em torno deste. Verifica-se que a contribuição para o número de “e-foldings” deste regime oscilatório é pequena comparativamente à contribuição do regime de aproximação lenta do mínimo e que o processo de dissipação inicial rápida de energia também não contribui significativamente para N . Assim o único processo pelo qual há um contribuição significativa para o número de “e-foldings” é através da aproximação lenta para o mínimo que terá, necessariamente, que ser lenta para que produza o número de “e-foldings” necessários. A simulação numérica ilustra o comportamento geral descrito anteriormente e que este é apenas consequência das propriedades qualitativas do potencial e não da sua forma particular considerada. Assim os resultados obtidos são válidos para potenciais com dois ou mais extremos que são modelados pelos potenciais (3.35) com dois extremos consecutivos. Na realidade os potenciais com a forma particular (3.35) só são considerados por estarem associados a sistemas físicos relevantes e bem conhecidos. Também fica claro que as três restrições: número de “e-foldings”, amplitude de perturbações e região de energias admissíveis, podem ser satisfeitas num potencial genérico, no sentido explicado anteriormente, sem um refinamento exagerado dos parâmetros. A conclusão final é: num quadro de um estágio de inflação finita a aproximação de “slow-roll” é um ponto de partida para o estudo das restrições de novos dados observacionais.

No que se segue far-se-á, por contraste, uma discussão, usando argumentos

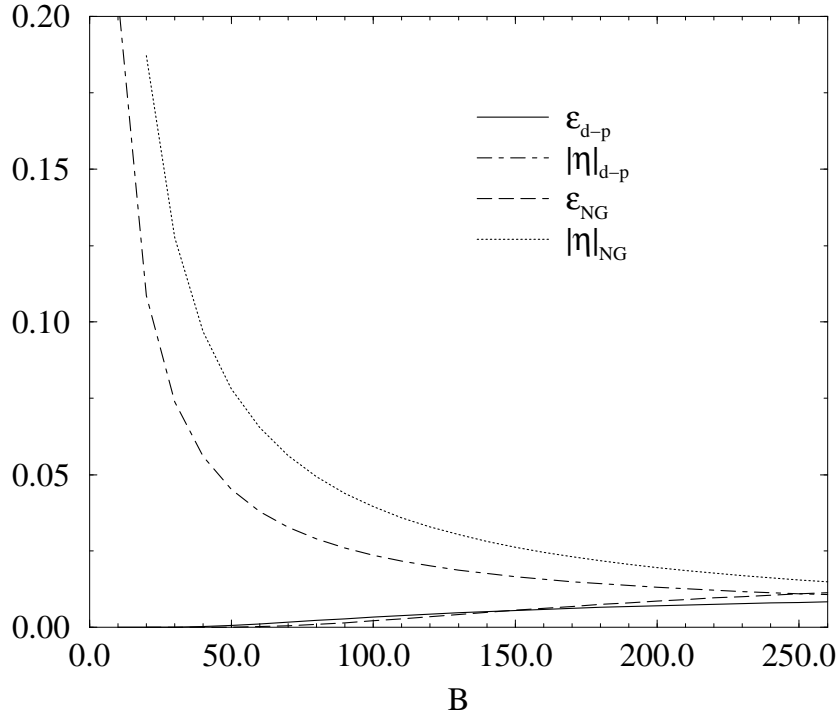


Figura 3.10: Parâmetros de “slow-roll” como função de B em $N = 30$ para os dois potenciais duplo-poço e Nambu-Goldstone.

analíticos, sobre os potenciais monótonos que dão origem a uma amplitude de perturbações escalares da forma $\delta \simeq \frac{\dot{a}^2}{a^2|\dot{\phi}|}$ e quais as condições necessárias para se obter um comportamento inflacionário para estes potenciais. A abordagem é admitir um determinado comportamento para o factor de escala $a(t)$ e para o campo $\phi(t)$ sem especificar o potencial $V(\phi)$ e depois integrar a equação da dinâmica do campo para obter a forma do potencial compatível com o comportamento admitido inicialmente para $\phi(t)$.

Recorde-se quais as equações que descrevem a dinâmica do campo ϕ e do factor de escala a , para o caso $k = 0$, (3.25) e (3.26),

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (3.47)$$

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (3.48)$$

Com as definições de γ_ϕ (3.29), de densidade de energia ρ_ϕ (3.30) e pressão p_ϕ (3.31) é fácil ver que a equação (3.47) é equivalente a

$$\dot{\rho}_\phi + 3\gamma_\phi\frac{\dot{a}}{a}\rho_\phi = 0. \quad (3.49)$$

Considere-se soluções das equações (3.47) e (3.48) em que se mantém constante a razão entre a energia cinética do campo $\dot{\phi}^2$ e a energia potencial $V(\phi)$ durante um certo período de tempo. Isto é equivalente a ter, ver equação (3.29),

$$\gamma_\phi = cte. \quad (3.50)$$

Repare-se que o estudo qualitativo do regime assintótico das equações (3.47) e (3.48) foi feito na secção (2.1.1) para $\gamma_\phi = cte$.

Assim se γ_ϕ é constante a equação (3.49) pode ser integrada, o que dá

$$\rho_\phi = \mu a^{-3\gamma_\phi} \quad (3.51)$$

onde $\mu = \rho_{\phi_0} a_0^{3\gamma_\phi}$ é uma constante que depende das condições iniciais da densidade de energia ρ_{ϕ_0} e do factor de escala a_0 .

Substituindo em (3.48) e integrando obtém-se

$$a(t) = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3\gamma_\phi}} \left(\frac{3\gamma_\phi}{2}\right)^{\frac{2}{3\gamma_\phi}} t^{\frac{2}{3\gamma_\phi}}. \quad (3.52)$$

Esta é a solução para os modelos de FLRW de curvatura nula sem constante cosmológica com um fluido perfeito.

Suponha-se que $\dot{\phi}$ tem um comportamento no tempo do tipo

$$\dot{\phi} = ct^{-m}. \quad (3.53)$$

Introduzindo (3.53) em (3.48) vem $m = 1$ e $c = \frac{2}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3}}$ (esta constante pode tomar-se positiva sem perda de generalidade). Como, para soluções de expansão, se tem

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3\gamma_\phi} \frac{1}{t} \quad (3.54)$$

a equação (3.47) fica

$$\frac{1}{t^2} \frac{2}{\gamma_\phi} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{\gamma_\phi} - 1\right) + V'(t) = 0. \quad (3.55)$$

Integrando (3.55) vem

$$V(t) = \frac{2}{\gamma_\phi} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{\gamma_\phi} - 1\right) t^{-1} + V_0. \quad (3.56)$$

Assim

$$\phi(t) = \frac{2}{\gamma_\phi} \sqrt{\frac{2}{3}} \ln(t)$$

e invertendo a relação anterior, o potencial fica igual a

$$V(\phi) = \frac{2}{\gamma_\phi} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{\gamma_\phi} - 1 \right) e^{-\phi\gamma_\phi/2\sqrt{3/2}} + V_0. \quad (3.57)$$

Note-se que a parcela V_0 corresponde à existência de uma constante cosmológica o que implica que assintoticamente o factor de escala tem um comportamento de de Sitter. Como, agora, se quer soluções assintóticas em que $a(t) \propto t^{\frac{2}{3\gamma_\phi}}$ põe-se $V_0 = 0$. Sobre as propriedades das soluções deste tipo e sua importância ver [BB88] [Hal87] [LM85] [LS99] [Bil99].

Repare-se que o único parâmetro livre do potencial (3.57) é γ_ϕ e que os parâmetros de “slow-roll” são constantes no tempo

$$\epsilon = \eta = \frac{3}{2}\gamma_\phi, \quad (3.58)$$

e, neste caso, não há fim de inflação. A amplitude de perturbações escalares tem a forma anteriormente usada (A.21) $\delta \simeq \frac{a^2}{a^2|\dot{\phi}|}$ (ver apêndice A).

Repare-se que o factor de escala tem sempre um comportamento de expansão e que inflação corresponde a $\gamma_\phi < \frac{2}{3}$.

O potencial (3.57) é um exemplo para o qual as restrições inflacionarias podem ser verificadas sem “slow-roll” ($\gamma_\phi \ll 1$). No entanto, para este potencial, não há fim de inflação o que o elimina como candidato plausível para descrever a evolução do universo durante todo o período de inflação.

Capítulo 4

Teorias escalares tensoriais

As teorias escalares tensoriais (TET) são uma generalização natural da RG com a particularidade de a constante de gravitação não ser uma quantidade posta *a priori* na teoria. O seu valor é determinado por um campo escalar que evolui no tempo. Neste Capítulo far-se-á uma dedução destas equações a partir de um principio variacional e discutir-se-á a passagem das TET para a relatividade geral mais um campo escalar. Considerar-se-ão, neste contexto, os modelos de FLRW com um campo escalar. No caso em que o campo está sujeito a um potencial constante e que o conteúdo material é radiação o estudo reduz-se, como se verá, ao estudo dos modelos de FLRW do segundo Capítulo em RG. Mostrar-se-á que, para o caso de radiação e através do estudo local em torno de um mínimo não nulo do potencial, a RG é um atractor para estas teorias e que o comportamento assintótico do factor de escala é de de Sitter. A convergência para o atractor de de Sitter é estudada através da regularização das equações no infinito. Será feita uma generalização dos resultados do Capítulo 3 no que respeita às condições para que ocorra um período de inflação para potenciais do tipo duplo-poço. Por fim far-se-á uma comparação entre as equações das TET e os modelos de Bianchi diagonais do tipo *A* e utilizar-se-á esta analogia para provar a conjectura do recolapso, para o modelo de FLRW de curvatura positiva, para uma escolha particular do potencial e do termo de interacção entre a matéria e o campo.

4.1 Equações das teorias escalares tensoriais

As TET são baseadas na densidade lagrangeana

$$\mathcal{L}_{tet} = \sqrt{-g} \left\{ \phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - 2U(\phi) + 2L_m \right\} \quad (4.1)$$

onde ϕ é o campo escalar, $\omega(\phi)$ uma função de acoplamento e $U(\phi)$ uma função de ϕ e L_m o lagrangeano da matéria. Note-se que estas teorias têm uma “constante”

de gravitação ϕ^{-1} . Um caso particular, historicamente importante, é a teoria de Brans-Dicke que corresponde a ter $\omega(\phi) = cte$ [BD61].

4.1.1 Princípio variacional para as teorias escalares tensoriais

Considere-se o funcional da acção para as teorias escalares tensoriais,

$$I_{tet} = \int \mathcal{L}_{tet} d^4x. \quad (4.2)$$

As equações gerais obtêm-se de (4.2) por variação de $g_{\alpha\beta}$ e ϕ . A variação de ϕ dá

$$R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \left(\frac{\omega'(\phi)}{\omega(\phi)} - \frac{1}{\phi} \right) - \square\phi - 2U'(\phi) = 0. \quad (4.3)$$

Da variação de $g_{\alpha\beta}$ obtêm-se os seguintes termos [LPPT75]

$$\frac{\delta}{\delta g_{\alpha\beta}} \left[\frac{\omega(\phi)}{\phi} g_{\alpha\beta} \phi^{,\alpha} \phi^{,\beta} \right] = \frac{\omega(\phi)}{\phi} \left[\phi^{,\alpha} \phi^{,\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \phi^{,\alpha} \phi^{,\beta} \sqrt{-g} \right] \quad (4.4)$$

e

$$\delta [\phi R \sqrt{-g}] = \phi \sqrt{-g} G^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + \phi \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta (R_{\alpha\beta}) \quad (4.5)$$

e o tensor energia-momento da matéria

$$\delta [L_m \sqrt{-g}] = \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \quad (4.6)$$

Note-se que há uma contribuição adicional para a variação da acção por comparação com a derivação variacional das equações de E na RG no Capítulo 2, que é o segundo termo de (4.5) $g^{\alpha\beta} \phi \delta (R_{\alpha\beta})$.

Tem-se

$$g^{\alpha\beta} \phi \delta (R_{\alpha\beta}) = \phi \left(g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \right)_{,\gamma} - \phi \left(g^{\alpha\gamma} \sqrt{-g} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \right)_{,\gamma} \quad (4.7)$$

e assim vem

$$g^{\alpha\beta} \phi \delta (R_{\alpha\beta}) = g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \partial_{\gamma} \phi \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - g^{\alpha\gamma} \sqrt{-g} \partial_{\gamma} \phi \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \quad (4.8)$$

a menos da derivada total

$$-\partial_{\gamma} \left[\sqrt{-g} \phi \left(g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - g^{\alpha\gamma} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \right) \right]$$

que não contribui para a variação da acção. Substituindo as relações auxiliares, ver (2.26),

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\mu}^{\mu} \sqrt{-g} &= \sqrt{-g}_{,\nu} \\ (g^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\nu} &= -g^{\nu\beta} \Gamma_{\beta\nu}^{\mu} \sqrt{-g}, \end{aligned}$$

e

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha\phi\sqrt{-g}^{\alpha} \quad (4.9)$$

em (4.8) vem directamente

$$g^{\alpha\beta}\phi\delta(R_{\alpha\beta}) = \sqrt{-g}\delta g^{\alpha\beta}[-\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi + g_{\alpha\beta}\square\phi]. \quad (4.10)$$

Assim as equações para as teorias escalares tensoriais ficam então

$$G^{\alpha\beta}\phi = T^{\alpha\beta} + \frac{\omega(\phi)}{\phi}\left(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\right)\phi_{,\gamma}\phi_{,\delta} + \nabla_\alpha\nabla_\beta\phi - g_{\alpha\beta}\square\phi \quad (4.11)$$

e

$$R - \frac{\omega(\phi)}{\phi}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}\left[\frac{\omega'(\phi)}{\omega(\phi)} - \frac{1}{\phi}\right] - \square\phi - 2U'(\phi) = 0. \quad (4.12)$$

4.2 Teorias escalares tensoriais como relatividade geral e um campo escalar

É possível escrever a densidade lagrangeana (4.1) como uma densidade lagrangeana de relatividade geral mais um campo escalar (2.32) através da transformação conforme

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\phi}{\phi^*}g_{\alpha\beta} \quad (4.13)$$

$$\frac{d\varphi}{d\phi} = \pm \frac{\sqrt{(2\omega(\phi) + 3)\phi^*}}{\sqrt{16\pi}\phi} \quad (4.14)$$

onde ϕ^* é uma constante que faz o papel da constante de gravitação (no que se segue faz-se $\phi^* = 1$ e retira-se o factor 8π), φ é um novo campo escalar relacionado com ϕ através de (4.14) e o lagrangeano fica

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\tilde{g}}\left\{\tilde{R} - \varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} + 2V(\varphi) + 2\tilde{L}_m\right\} \quad (4.15)$$

onde $V(\varphi) = \frac{U(\phi(\varphi))}{\phi^2(\varphi)}$ e $\tilde{L}_m = \frac{L_m}{\phi^2(\varphi)}$ e $\tilde{R} = \frac{R}{\phi(\varphi)}$ é o escalar de Ricci calculado com a métrica $\tilde{g}_{\alpha\beta}$.

Diz-se que as equações escritas com a métrica $g_{\alpha\beta}$ estão escritas no referencial de Jordan e que as escritas com $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ estão escritas no referencial de Einstein.

Repare-se que o lagrangeano da matéria no referencial de Einstein, no caso de um fluido perfeito, inclui termos respeitantes ao fluido e ao campo escalar

$\tilde{L}_m = \tilde{L}_m(\rho, p, \varphi)$. Isto introduz um termo novo nas equações por comparação com a teoria da relatividade geral com um campo escalar.

A teoria da RG com um campo escalar não envolve acoplamento entre o campo e a matéria. Assim a passagem das TET para o referencial de Einstein, onde a teoria se assemelha à relatividade geral, fornece uma maneira natural de introduzir nas primeiras equações termos de interação entre a matéria e um campo.

No caso dos modelos espacialmente homogêneos, modelos de Bianchi, a transformação conforme (4.13) não altera a estrutura das equações já que para estes casos o campo $\phi = \phi(t)$ é a apenas função da coordenada temporal o que permite escrever as equações para os modelos de Bianchi com a mesma forma obtidas no Capítulo 2 com a equação adicional para o campo.

4.3 Modelos de FLRW nas teorias escalares tensoriais

Com a hipótese de homogeneidade e isotropia as equações das teorias escalares tensoriais reduzem-se aos modelos de FLRW com um termo de interação entre a matéria e o campo. O termo de interação entre a densidade de matéria ρ e o campo φ surge na equação da conservação da energia

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\gamma\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{M}(\varphi)}{M(\varphi)} \quad (4.16)$$

onde

$$M(\varphi) = \mu (\phi(\varphi))^{-2+3\gamma/2} \quad (4.17)$$

e $\mu = \rho_0 a_0^{3\gamma}$ é a quantidade de energia inicial. Como a transformação $\phi = \phi(\varphi)$ é definida por (4.14) a forma do potencial $M(\varphi)$ depende da forma da função $\omega(\phi)$. Toma-se sempre $M(\varphi) \geq 0$. Repare-se que é este último termo que destrói a equivalência entre a relatividade geral e um campo escalar e as teorias escalares tensoriais. Esta equivalência pode ser restabelecida se $M(\varphi) = cte$.

Para γ constante é possível integrar a equação (4.16) que dá

$$\rho = \mu a^{-3\gamma} M(\varphi). \quad (4.18)$$

Note-se que quando $\varphi = cte$ a teoria escalar tensorial reduz-se à RG.

As equações ficam

$$\begin{aligned} 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} &= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + a^{-3\gamma}M(\varphi) + V(\varphi) \\ \ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} &= -a^{-3\gamma}M'(\varphi) - V'(\varphi). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Da mesma maneira que se definiu o momento conjugado do factor de escala como $P_a = 4a\dot{a}$ nos modelos de FLRW define-se o momento conjugado do campo

escalar como $P_\varphi = -\frac{2}{3}a^3\dot{\varphi}$. O sistema anterior é equivalente ao sistema com hamiltoneano

$$\mathcal{H} = \frac{P_a^2}{8a} + 2ka - \frac{3}{4}\frac{P_\varphi^2}{a^3} - \frac{2}{3}a^{-3\gamma+3}M(\varphi) - \frac{2}{3}a^3V(\varphi) \quad (4.20)$$

com a restrição $\mathcal{H} = 0$.

Fazendo a mudança de variável independente $\frac{d}{dt'} = 4a\frac{d}{dt}$ o hamiltoneano fica $\mathcal{H}' = 4a\mathcal{H}$, e obtém-se

$$\mathcal{H}' = \frac{P_a^2}{2} + 8ka^2 - 3\frac{P_\varphi^2}{a^2} - \frac{8}{3}a^{-3\gamma+4}M(\varphi) - \frac{8}{3}a^4V(\varphi)$$

com as equações

$$\begin{aligned} a' &= P_a \\ P'_a &= -16ka - 6\frac{P_\varphi^2}{a^3} + \frac{8}{3}(-3\gamma+4)a^{-3\gamma+3}M(\varphi) + \frac{32}{3}a^3V(\varphi) \\ \varphi' &= -6\frac{P_\varphi}{a^2} \\ P'_\varphi &= \frac{8}{3}a^{-3\gamma+4}M'(\varphi) + \frac{8}{3}a^4V'(\varphi) \end{aligned} \quad (4.21)$$

e a restrição $\mathcal{H}' = 0$.

A dinâmica deste sistema de equações depende dos dois potenciais M e V . O potencial M está directamente relacionado com a matéria e estabelece o acoplamento entre o campo escalar e a matéria através da escolha da função $\omega(\phi)$. Pondo $\mu = 0$ obtém-se as equações para o vazio. A existência deste potencial torna o sistema particularmente complicado de estudar. No entanto para alguns valores de γ o sistema simplifica-se. Os casos fáceis de tratar são $\gamma = 0, \frac{4}{3}$, respectivamente, vazio e radiação. No caso de radiação $M(\varphi) = \mu$ é constante.

O caso de radiação, $\gamma = \frac{4}{3}$, reduz o hamiltoneano à forma

$$\mathcal{H} = \frac{P_a^2}{2} + 8ka^2 - 3\frac{P_\varphi^2}{a^2} - \frac{8}{3}\mu - \frac{8}{3}a^4V(\varphi) \quad (4.22)$$

e equações do movimento (4.21) ficam

$$\begin{aligned} a' &= P_a \\ P'_a &= -16ka - 6\frac{P_\varphi^2}{a^3} + \frac{32}{3}a^3V(\varphi) \\ \varphi' &= -6\frac{P_\varphi}{a^2} \\ P'_\varphi &= \frac{8}{3}a^4V'(\varphi) \end{aligned} \quad (4.23)$$

com a restrição $\mathcal{H} = 0$.

De entre os potenciais, $V(\varphi)$, possíveis existe um em particular que é fácil de tratar, o potencial constante $V(\varphi) = \lambda$, onde λ é uma constante real positiva. A análise deste caso vai ser útil na descrição local do sistema completo (4.23) numa vizinhança dos seus pontos de equilíbrio para um potencial arbitrário. A escolha deste potencial implica $P'_\varphi = 0$ e a existência da integral primeira $P_\varphi = L$ onde L é uma constante. As equações (4.23) reduzem-se a

$$\begin{aligned} a' &= P_a \\ P'_a &= -16ka - 6\frac{L^2}{a^3} + \frac{32}{3}a^3\lambda \\ \varphi' &= -6\frac{L}{a^2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

com a restrição $\frac{P_a^2}{2} + 8ka^2 - 3\frac{L^2}{a^2} - \frac{8}{3}\mu - \frac{8}{3}a^4\lambda = 0$.

O estudo qualitativo deste sistema faz-se de uma maneira semelhante aquela que foi feita para os modelos de FLRW. Note-se que o hamiltoneano (4.22) é, neste caso, o hamiltoneano de uma partícula material que se move num potencial quártico sujeita a uma força centrípeta. Repare-se que a energia cinética do hamiltoneano (4.22) tem a forma canónica $\frac{P_a^2}{2}$, logo o estudo qualitativo é feito pela análise do potencial $V(a) = 8ka^2 - 3\frac{L^2}{a^2} - \frac{8}{3}\mu - \frac{8}{3}a^4\lambda = 0$.

O caso mais simples, $L = 0$, reduz-se ao estudo do modelo de FLRW para $\gamma = 4/3$. Considere-se então o caso $L \neq 0$.

Para $k = -1, 0$ facilmente se vê que o único ponto crítico de $V(a)$ é $a = 0$ e que $V(a) < 0$. Para $k = 1$ o potencial $V(a)$ tem apenas um ponto crítico $a_c > 0$. É possível determinar o comportamento qualitativo das soluções para este caso reparando que existe um valor crítico de μ que depende apenas de λ , que se denota por μ_c , para o qual $V(a) \leq 0$ para $\mu \geq \mu_c$, logo, neste caso, todas as soluções são de inflação. Se $\mu < \mu_c$ existem valores de λ e μ , e um valor crítico $L_c(\lambda, \mu)$ tal que se $L^2 < L_c^2$ e $a_0 < a_c$ todas as soluções são de colapso, caso contrário todas as soluções são de inflação. O estudo qualitativo para todos os valores da curvatura resume-se na Tabela (4.1) usando a mesma nomenclatura usada nos modelos de FLRW para a classificação das suas soluções.

O estudo do caso de vazio, $\gamma = 0$, reduz-se ao caso de $\gamma = \frac{4}{3}$ tomando como potencial a soma dos dois potenciais, *i. e.*, tomando $U(\varphi) = V(\varphi) + M(\varphi)$ como potencial.

4.3.1 Estudo local para um potencial arbitrário com um mínimo não nulo

Considerem-se as equações (4.23) para o caso de radiação, $\gamma = \frac{4}{3}$. Faz-se o estudo do comportamento das suas soluções em torno de um ponto crítico de $V(\varphi)$

	$0 < \mu < \mu_c$	$\mu > \mu_c$
$k = 0$	Soluções de expansão do tipo (I)	Soluções de expansão do tipo (I)
$k = -1$	Soluções de expansão do tipo (I)	Soluções de expansão do tipo (I)
$k = 1$	Se $L^2 < L_c^2$ e $a_0 < a_c$ soluções tipo (C); caso contrário soluções de expansão do tipo (I)	Soluções de expansão do tipo (I)

Tabela 4.1: Resumo do estudo qualitativo dos modelos de FLRW para diferentes valores da curvatura para um potencial constante. Onde $L_c^2 = L_c^2(\lambda, \mu)$, $\mu_c = \mu_c(\lambda)$ e a_c é um ponto crítico de $V(a)$.

que seja um mínimo não nulo. O que se quer mostrar é que associado a este ponto crítico está um atrator para o qual convergem as soluções do sistema (4.23) para tempos positivos (a este atrator está associado um comportamento assintótico do tipo RG).

Para $k = -1, 0$ das equações (4.19) é fácil ver que para condições iniciais $\dot{a}_0 > 0$ que \dot{a} só troca de sinal para $a = +\infty$, logo, para estas condições iniciais todas as soluções são de expansão do tipo (I). O caso $k = 1$ é tratado de seguida.

Para este caso os pontos de equilíbrio são φ_c : $V'(\varphi_c) = 0$, ponto crítico de $V(\varphi)$; $a = 0$ e $a_c = \sqrt{3/2V(\varphi_c)}$. A estabilidade local do ponto crítico $(a_c, P_a = 0, \varphi = \varphi_c, P_\varphi = 0)$ é determinada pelos valores próprios da matriz da aproximação linear do sistema (4.21) que é igual neste ponto a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 16(-1 + 2a_c^2 V(\varphi_c)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{a_c^2} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}a_c^4 V''(\varphi_c) & 0 \end{bmatrix}.$$

A estabilidade local no plano (a, P_a) é determinada pelos valores próprios

$$\begin{aligned} \lambda_a &= 2\sqrt{2} \\ \lambda_{P_a} &= -2\sqrt{2}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

um ponto sela, e no plano (φ, P_φ) pelos valores próprios

$$\begin{aligned} \lambda_\varphi &= 4a_c \sqrt{-V''(\varphi_c)} \\ \lambda_{P_\varphi} &= -4a_c \sqrt{-V''(\varphi_c)}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Repare-se que se o ponto crítico, φ_c for um mínimo não degenerado do potencial V então $V''(\varphi_c) > 0$ o que implica que os valores próprios (4.26) são imaginários

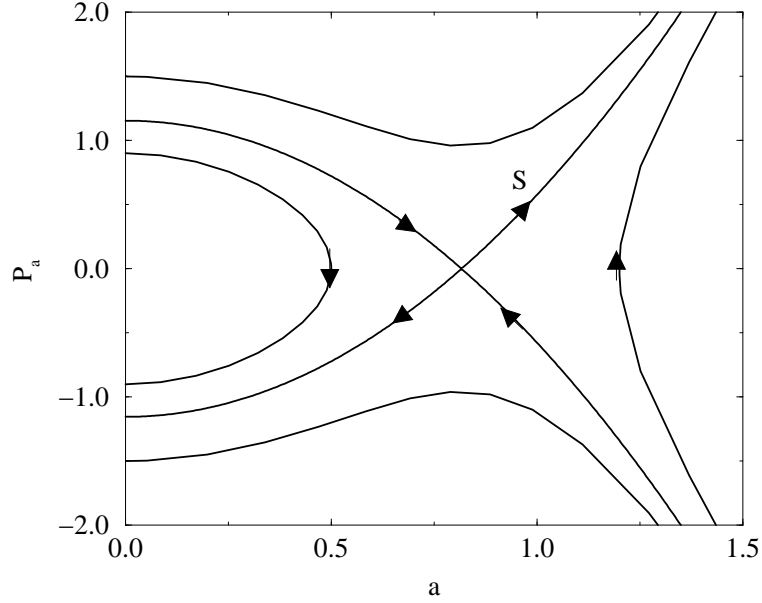


Figura 4.1: Espaço de fase para $\gamma = 4/3$, $k = 1$.

puros e o ponto de equilíbrio $(\varphi_c, P_\varphi = 0)$ é um centro. No caso do ponto crítico do potencial ser um máximo o ponto de equilíbrio $(\varphi_c, P_\varphi = 0)$ é uma sela. Considere-se o primeiro caso.

Como em torno de um mínimo não degenerado e positivo o potencial $V(\varphi)$ pode sempre ser escrito como

$$V(\varphi) = \lambda + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + O_3(\varphi), \quad (4.27)$$

onde $\lambda > 0$, os valores próprios associados são

$$\begin{aligned} \lambda_\varphi &= 4i\sqrt{\frac{3m^2}{2\lambda}} \\ \lambda_{P_\varphi} &= -4i\sqrt{\frac{3m^2}{2\lambda}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

O ponto crítico $(a_c, P_a = 0, \varphi = \varphi_c, P_\varphi = 0)$ é então do tipo sela-centro. Note-se que para o potencial (4.27) $\varphi_c = 0$ e para condições iniciais $\varphi_0 = 0$ a dinâmica reduz-se ao caso integrável já estudado com $V(\varphi) = \lambda$ e $P_\varphi = 0$. Mais à frente se verá que as soluções $\varphi(t) = 0$ são um atrator de todas as soluções numa vizinhança do mínimo não nulo do potencial.

A estrutura sela-centro do ponto de equilíbrio $(a_c, P_a = 0, \varphi_c = 0, P_\varphi = 0)$ permite descrever a dinâmica numa vizinhança deste ponto a partir da aproximação

linear. Este tipo de comportamento pode ser também encontrado no modelo de Bianchi tipo IX com um eixo de simetria e com constante cosmológica não nula considerado em [OSS97] cujos resultados se transpõem naturalmente para este modelo.

Pode-se decompor o hamiltoniano (4.22), na vizinhança do sela-centro, numa soma de dois termos, um puramente rotacional e outro hiperbólico.

O hamiltoniano (4.22) em torno do sela-centro é igual a

$$\mathcal{H} = \left[\frac{P_a^2}{2} - 16(a - a_c)^2 \right] - [2\lambda P_\varphi^2 + 3\lambda^2 m^2 \varphi^2] + \frac{8}{3}(\mu_c - \mu) \quad (4.29)$$

$$+ O_3(a - a_c, \varphi)$$

onde $\mu_c = -\frac{\lambda}{4}$ com $a_c^2 = \frac{3}{2\lambda}$. Se se definir as energias para o factor de escala e para o campo

$$E_a = \frac{P_a^2}{2} - 16(a - a_c)^2 \quad (4.30)$$

$$E_\varphi = 2\lambda P_\varphi^2 + \frac{3}{\lambda^2} m^2 \varphi^2 \quad (4.31)$$

a equação (4.29) fica

$$\mathcal{H} = E_a - E_\varphi + \frac{8}{3}(\mu_c - \mu) + O_3(a - a_c, \varphi)$$

e é válida a expressão aproximada numa vizinhança suficientemente pequena do sela-centro

$$E_a - E_\varphi + \frac{8}{3}(\mu_c - \mu) \simeq 0, \quad (4.32)$$

com $|\mu_c - \mu| \ll 1$. Note-se que na aproximação linear as quantidades (4.30) e (4.31) são integrais primeiras do movimento. No ponto crítico tem-se $\mu_c = \mu$.

Repare-se que $E_\varphi \geq 0$ porque $V''(\varphi_c) \geq 0$ e está associado ao movimento oscilatório de φ , por outro lado, a energia do factor de escala E_a não tem sinal bem definido numa vizinhança de $(a_c, 0)$ onde a dinâmica é hiperbólica. Na aproximação linear a dinâmica hiperbólica do factor de escala está completamente desacoplada do comportamento oscilatório do campo.

A dinâmica no regime linear é facilmente descrita. Se $E_a > 0$ num instante inicial então as soluções são inflacionárias, se $E_a < 0$ tem-se órbitas de colapso. Em geral, no caso não linear, dadas condições iniciais numa vizinhança dos conjuntos invariantes do sela-centro a energia acessível distribui-se de uma maneira irregular pelos dois termos E_a e E_φ [OSS97]. Como o resultado final da evolução do factor de escala depende da maneira como é feita esta repartição de energia, a fronteira dos dois tipos de comportamento principais colapso ou expansão não é regular.

As soluções de (4.23) têm uma dependência sensível nas condições iniciais, numa vizinhança das separatrizes (ver Figura (4.1)). Sobre a dimensão destas regiões ver também [OSS97].

Este comportamento caótico está restrito a uma pequena região em torno das separatrizes. Na realidade este comportamento é um regime pouco provável porque face ao conjunto total de condições iniciais possíveis, o conjunto de condições iniciais que dão origem a soluções caóticas é muito pequeno.

Os resultados das duas secções seguintes foram obtidos em [MN98] e generalizam os obtidos em [DN93a] e [DN93b]. Aqueles apresentados aqui diferem dos em [MN98].

4.3.2 A relatividade geral como atractor das teorias escalares tensoriais

Voltando ao sistema inicial (4.19) com um potencial arbitrário [DN93a] [DN93b] [MN98] e $\gamma = \frac{4}{3}$ (radiação) (na notação inicial em (a, φ)) note-se que sempre que φ_c é um ponto crítico de $V(\varphi)$, então $(a_{\varphi_c}(t), \varphi(t) = \varphi_c, \dot{\varphi} = 0)$ é uma solução de sistema (4.24) com $P_\varphi = 0$ e $V(\varphi) = \lambda$. A viabilidade da RG como regime assintótico das TET depende da estabilidade das soluções $\dot{\varphi} = 0$. Esta estabilidade é garantida pela existência de uma função de Liapunov que é simplesmente a energia total do campo. Esta é uma função que tem derivada não positiva ao longo de uma solução com condições iniciais numa vizinhança de um ponto de equilíbrio estável. É uma generalização da ideia de que numa vizinhança de um nodo ou foco estável a distância, no espaço de fase, de um ponto representativo do sistema ao ponto de equilíbrio, diminui ao longo do tempo. Assim, sob certas hipóteses, uma função de Liapunov pode ser usada para garantir a estabilidade do ponto de equilíbrio considerado [HS74] [Rob95].

Considere-se então as equações (4.19) que descrevem o factor de escala a e o campo φ para qualquer γ que se volta a escrever, por comodidade,

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) - a^{-3\gamma}M(\varphi) = 0 \quad (4.33)$$

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} = -V'(\varphi) - a^{-3\gamma}M'(\varphi). \quad (4.34)$$

Da mesma maneira que se deduziu uma equação de segunda ordem nos modelos de FLRW, derivando (4.33) em ordem ao tempo, substituindo (4.34) obtém-se

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) + \left(\frac{3\gamma}{2} - 1\right) a^{-3\gamma}M(\varphi). \quad (4.35)$$

Considere-se o caso $\gamma = \frac{4}{3}$. Os outros valores de γ serão tratado como perturbações deste.

Uma *função de Liapunov* $F = F(\varphi, \dot{\varphi})$ ([HS74], pg. 192), para o ponto de equilíbrio $(\varphi_c, 0)$, é uma função contínua numa vizinhança deste ponto e diferenciável em todos os pontos numa vizinhança estrita de $(\varphi_c, 0)$ tal que:

1. $F(\varphi_c, 0) = C_1$, onde C_1 é uma constante real e $F(\varphi, \dot{\varphi}) > C_1$ numa vizinhança estrita de $(\varphi_c, 0)$
2. $\dot{F} \leq 0$ numa vizinhança estrita de $(\varphi_c, 0)$

A existência desta função garante a estabilidade do ponto de equilíbrio considerado.

Por outro lado se $\dot{F} < 0$ numa vizinhança estrita de $(\varphi_c, 0)$ então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável e dá-se o nome de função de Liapunov estrita à função F .

A energia do campo φ é igual a $\rho_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)$. Derivando-a em ordem ao tempo vem

$$\dot{\rho}_\varphi = \ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \dot{\varphi}V'(\varphi) \quad (4.36)$$

e usando a equação do campo (4.34) vem

$$\dot{\rho}_\varphi = -3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi}^2. \quad (4.37)$$

Então sempre que $\frac{\dot{a}}{a} > 0$, solução de expansão, a função $\rho_\varphi(\varphi, \dot{\varphi})$ é uma função de Liapunov estrita para o ponto de equilíbrio $(\varphi, \dot{\varphi}) = (\varphi_c, 0)$, porque $\rho_\varphi(\varphi_c, 0) = \lambda$ e $(\varphi_c, 0)$ é um mínimo não degenerado de $\rho_\varphi(\varphi, \dot{\varphi})$. É condição necessária e suficiente para que $\dot{\rho}_\varphi < 0$ que $a(t)$ seja crescente.

Por outro lado o volume no espaço de fase $(\varphi, \dot{\varphi})$ de uma região definida por $\rho_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}) \leq C_2$, onde C_2 é uma constante positiva, é dado por

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \int_{\rho_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}) \leq C_2} d\varphi d\dot{\varphi} \\ &= \int_{\rho_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}) \leq C_2} J(\varphi, \dot{\varphi}; \varphi_0, \dot{\varphi}_0) d\varphi_0 d\dot{\varphi}_0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde $J(\varphi, \dot{\varphi}; \varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ é o jacobiano da transformação $(\varphi, \dot{\varphi}) \rightarrow (\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$. Derivando (4.38) em ordem ao tempo, usando (4.33) e (4.34), vem

$$\dot{\Omega}(t) = -3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\Omega(t). \quad (4.39)$$

Quando $\rho_\varphi(\varphi, \dot{\varphi})$ é uma função de Liapunov para $(\varphi_c, 0)$ tem-se $\dot{\Omega}(t) < 0$. Assim a expansão $\frac{\dot{a}}{a} > 0$ é de facto a medida da estabilidade da solução $\varphi(t) = \varphi_c$ porque se terá uma contracção exponencial no espaço de fase $(\varphi, \dot{\varphi})$ sempre que $a(t)$ crescer exponencialmente (comportamento de de Sitter). Esta solução do

sistema completo, a que corresponde o ponto crítico de $V(\varphi)$, é um atrator de todas as órbitas com condições iniciais numa vizinhança de φ_c .

Repare-se que este estudo do comportamento assintótico permanece válido para qualquer γ desde que se tome estes casos como uma perturbação decrescente no tempo do caso $\gamma = \frac{4}{3}$ em que $a^{-3\gamma}M(\varphi) \ll 1$. Na secção seguinte formaliza-se esta discussão através da regularização das equações no infinito.

4.3.3 Convergência para atrator de de Sitter

A convergência para o atrator de de Sitter para γ arbitrário é garantida para uma condição inicial a_0 suficientemente grande pelo facto de as equações em $a = +\infty$ não dependerem de γ e de $M(\varphi)$. Assim, com a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} v &= P_a a^{-2} \\ u &= P_\varphi a^{-3} \end{aligned} \quad (4.40)$$

as equações (4.21) ficam

$$\begin{aligned} a' &= va^2 \\ P'_a &= -16ka - 6u^2a^3 + \frac{32}{3}a^3V(\varphi) + \frac{8}{3}(-3\gamma + 4)a^{-3\gamma+3}M(\varphi) \\ \varphi' &= -6ua \\ P'_\varphi &= \frac{8}{3}a^{-3\gamma+4}M'(\varphi) + \frac{8}{3}a^4V'(\varphi) \end{aligned} \quad (4.41)$$

e com (4.40)

$$\begin{aligned} u' &= \frac{8}{3}a^{-3\gamma+1}M'(\varphi) + \frac{8}{3}aV'(\varphi) - 3auv \\ v' &= -16ka^{-1} - 6u^2a + \frac{32}{3}aV(\varphi) - 2av^2 + \frac{8}{3}(-3\gamma + 4)a^{-3\gamma+1}M(\varphi). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Definindo $b = a^{-1}$ e eliminando as equações em P_a e P_φ em (4.41) com (4.42) vem

$$\begin{aligned} b' &= -v \\ v' &= -16kb - 6u^2b^{-1} + \frac{32}{3}b^{-1}V(\varphi) - 2b^{-1}v^2 + \frac{8}{3}(-3\gamma + 4)b^{3\gamma-1}M(\varphi) \\ u' &= \frac{8}{3}b^{3\gamma-1}M'(\varphi) + \frac{8}{3}b^{-1}V'(\varphi) - 3b^{-1}uv \\ \varphi' &= -6ub^{-1}. \end{aligned}$$

Redefinindo a escala de tempo por $\frac{d}{dt} = \frac{1}{4}b\frac{d}{dt'}$ (este é o tempo inicial das equações obtidas com o hamiltoniano (4.20)) obtém-se um sistema regular em $b = 0$

$$\begin{aligned}\dot{b} &= -\frac{1}{4}vb \\ \dot{v} &= -4kb^2 - \frac{3}{2}u^2 + \frac{8}{3}V(\varphi) - 2v^2 + \frac{2}{3}(-3\gamma + 4)b^{3\gamma}M(\varphi) \\ \dot{\varphi} &= -\frac{3}{2}u \\ \dot{u} &= \frac{2}{3}b^{3\gamma}M'(\varphi) + \frac{2}{3}V'(\varphi) - 3uv.\end{aligned}\tag{4.43}$$

Note-se que a restrição hamiltoneana fica, com (4.20),

$$\frac{1}{2}v^2b^{-4} + 8kb^{-2} - 3u^2b^{-4} - \frac{8}{3}b^{3\gamma-4}M(\varphi) - \frac{8}{3}b^{-4}V(\varphi) = 0$$

e fazendo $h = \mathcal{H}b^4$ vem

$$h = \frac{1}{2}v^2 + 8kb^2 - 3u^2 - \frac{8}{3}b^{3\gamma}M(\varphi) - \frac{8}{3}V(\varphi) = 0.\tag{4.44}$$

Em geral, e em particular numa vizinhança de $b = 0$, a dinâmica está restringida à variedade definida pela relação (4.44) que se denominará variedade de de Sitter

Para $b = 0$ obtém-se então um sistema regular dado pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{b} &= 0 \\ \dot{v} &= -\frac{3}{2}u^2 + \frac{8}{3}V(\varphi) - 2v^2 \\ \dot{\varphi} &= -\frac{3}{2}u \\ \dot{u} &= \frac{2}{3}V'(\varphi) - 3uv\end{aligned}\tag{4.45}$$

com a restrição

$$\frac{1}{2}v^2 - 3u^2 - \frac{8}{3}V(\varphi) = 0.\tag{4.46}$$

Note-se que o sistema anterior é na realidade um sistema de duas equações diferenciais já que uma delas é redundante devido à restrição (4.46). A quantidade h definida por (4.44) é conservada ao longo de uma solução do sistema (4.45).

Numa vizinhança de um mínimo não nulo do potencial (4.27), $V(\varphi) = \lambda + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + O_3(\varphi)$, as equações do movimento (4.45) ficam

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= -\frac{3}{2}u \\ \dot{u} &= \frac{2}{3}m^2\varphi - 3uv\end{aligned}\tag{4.47}$$

com restrição

$$\frac{1}{2}v^2 - 3u^2 - \frac{8}{3}\lambda - \frac{4}{3}m^2\varphi^2 = 0. \quad (4.48)$$

Os pontos de equilíbrio são $(u, \varphi, v) = (0, 0, \pm v_c)$ onde $v_c = 4\sqrt{\frac{1}{3}\lambda}$. Estes dois pontos de equilíbrio, $(0, 0, +v_c)$ e $(0, 0, -v_c)$, correspondem, respectivamente, ao atrator de de Sitter para tempos positivos e negativos.

Sobre a variedade de de Sitter (4.44) existe uma função de Liapunov para o ponto de equilíbrio $(\varphi, u, v) = (0, 0, \pm v_c)$. Repare-se que $v = -\frac{\dot{b}}{b}$ e que uma solução de expansão corresponde a $\dot{b} < 0$. Uma função de Liapunov é simplesmente

$$F(b, \varphi, u) = 3u^2 + \frac{8}{3}\lambda + \frac{4}{3}m^2\varphi^2 + \frac{8}{3}b^{3\gamma}M(\varphi) \quad (4.49)$$

cuja derivada em ordem ao tempo é

$$\dot{F}(b, \varphi, u) = -\frac{3}{4}v \left(24u^2 + \frac{8}{3}\gamma b^{3\gamma}M(\varphi) \right) \leq 0 \quad (4.50)$$

onde se usou as equações do movimento (4.43) e $M(\varphi) \geq 0$. Com a definição de função de Liapunov dada na secção anterior é fácil ver que a função (4.49) é uma função de Liapunov estrita para o ponto de equilíbrio $(\varphi, u, v) = (0, 0, v_c)$. Assim o atrator de de Sitter é assintoticamente estável.

Repare-se que este resultado justifica a observação feita na secção anterior acerca do comportamento qualitativo para valores de $\gamma \neq \frac{4}{3}$ como uma perturbação do caso $\gamma = \frac{4}{3}$. Isto é, dadas as constantes μ e λ existe um valor do factor de escala a_c tal que todas as soluções com condições iniciais $a_0 > a_c$ convergem para o atrator de de Sitter para qualquer γ .

No que se segue vai estudar-se a natureza dos pontos de equilíbrio sobre a variedade de infinito (4.48). A matriz da aproximação linear de (4.47) calculada em $(0, 0, \pm v_c)$ é igual a

$$M_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & \mp 3v_c \end{bmatrix}$$

com valores próprios iguais a

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(0,0,v_c)} &= -\sqrt{3\lambda} + \sqrt{3\lambda - 4m^2} \\ \lambda_2^{(0,0,v_c)} &= -\sqrt{3\lambda} - \sqrt{3\lambda - 4m^2} \end{aligned} \quad (4.51)$$

cujas partes reais $\Re(\lambda_{1,2}^{(0,0,v_c)})$ são para $\lambda > 0$ sempre negativas. Assim se $\lambda > 4/3m^2$ o ponto $(0, 0, +v_c)$ é um nodo estável e se $\lambda < 4/3m^2$ é um foco estável no plano

(u, φ) e um nodo estável em v . Para o ponto $(0, 0, -v_c)$ os valores próprios da matriz (4.51) são

$$\begin{aligned}\lambda_1^{(0,0,-v_c)} &= \sqrt{3\lambda} + \sqrt{3\lambda - 4m^2} \\ \lambda_2^{(0,0,-v_c)} &= \sqrt{3\lambda} - \sqrt{3\lambda - 4m^2}\end{aligned}\quad (4.52)$$

cujas partes reais $\Re(\lambda_{1,2}^{(0,0,-v_c)})$ são para $\lambda > 0$ sempre positivas. Assim se $\lambda > 4/3m^2$ o ponto $(0, 0, +v_c)$ é um nodo instável e se $\lambda < 4/3m^2$ é um foco instável no plano (u, φ) . Tem-se então, associado ao comportamento de de Sitter do factor de escala, dois tipos de comportamentos assintóticos para o campo: um comportamento oscilante amortecido e um comportamento sobre-amortecido a que correspondem, respectivamente, o foco estável e o nodo estável.

A análise da estabilidade linear confirma o que foi obtido com a função de Liapunov. A variedade estável do ponto $(0, 0, v_c)$ tem dimensão 3 (os três valores próprios associados a este ponto têm parte real sempre negativa). Assim o comportamento assintótico do factor de escala é de de Sitter, *i. e.*, $a(t) = a_0 e^{t\sqrt{\frac{\lambda}{3}}}$. Isto justifica o argumento dado no fim da secção (3.2.1).

4.3.4 Conjectura do recolapso

A analogia, nos modelos espacialmente homogéneos, entre as teorias escalares tensoriais e os modelos de Bianchi pode ser encontrada, como se referiu no primeiro Capítulo, nos modelos de Bianchi diagonais da classe *A*. Considere-se o caso das teorias escalares tensoriais nos modelos de FLRW de curvatura positiva com $\gamma = \frac{2}{3}$ sem potencial, *i. e.*, $V(\varphi) = 0$ e em torno de um mínimo nulo e não degenerado de $M(\varphi)$

$$M(\varphi) = \frac{\mu}{2}\varphi^2 + O_3(\varphi) \quad (4.53)$$

onde $\mu > 0$. Repare-se que o caso do mínimo não nulo de $M(\varphi)$ é equivalente a incluir um novo termo de matéria nas equações e por isso não será considerado aqui. As equações, em torno deste mínimo, ficam

$$3\frac{\ddot{a}^2}{a^2} + 3\frac{1}{a^2} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{\mu}{a^2}\varphi^2 \quad (4.54)$$

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} = -\frac{\mu}{a^2}\varphi \quad (4.55)$$

e

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -\dot{\varphi}^2. \quad (4.56)$$

Note-se que as equações (4.54), (4.55) e (4.56) têm a mesma estrutura que as equações obtidas em (2.57) e (2.58) para o caso dos modelos de Bianchi descritas no segundo Capítulo apenas com dois graus de liberdade [RS75].

Definindo $\alpha = \ln(a)$ e uma nova coordenada independente t' tal que $\frac{d}{dt'} = e^\alpha \frac{d}{dt}$ as equações (4.54), (4.55) e (4.56) ficam

$$3\alpha'^2 + 3 = \frac{1}{2}\varphi'^2 + \frac{\mu}{2}\varphi^2 \quad (4.57)$$

$$\varphi'' + 2\alpha'\varphi' + \mu\varphi = 0 \quad (4.58)$$

e

$$\alpha'' = -\frac{1}{3}\varphi'^2. \quad (4.59)$$

O estudo do comportamento assintótico das equações (4.57), (4.58) e (4.59) é fácil de fazer e é em quase tudo semelhante á demonstração da conjectura do recolapso para os modelos de Bianchi tipo *IX* diagonal com constante cosmológica nula em [LW89].

Considere-se a mudança de variáveis $\varphi = \frac{r}{\sqrt{\mu}} \cos(\theta)$ e $\varphi' = r \sin(\theta)$. As equações (4.57), (4.58) e (4.59) ficam, para o factor de escala

$$3\alpha'^2 + 3 = \frac{1}{2}r^2 \quad (4.60)$$

$$\alpha'' = -\frac{1}{3}r^2 \sin^2(\theta) \quad (4.61)$$

e para o campo obtêm-se as equações de um oscilador não linear

$$\begin{aligned} r' &= -2\alpha' r \sin^2(\theta) \\ \theta' &= -\sqrt{\mu} - 2\alpha' \sin(\theta) \cos(\theta). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Como $\alpha'' \leq 0$ a função α' é monótona decrescente. O estudo deste sistema de equações divide-se em dois casos: o caso $\alpha'_0 < 0$ e $\alpha'_0 > 0$. É fácil ver que dada uma condição inicial $\alpha'_0 < 0$, como $\alpha'' \leq 0$, que α tende para $-\infty$. Portanto o factor de escala a tende para zero assintoticamente. Considere-se agora uma condição inicial $\alpha'_0 > 0$ e suponha-se que α' nunca se anula. Como as equações que descrevem a dinâmica do campo (4.62) são as de um oscilador amortecido com factor de amortecimento igual a α' isto implica que r , a energia do oscilador, tenderia para zero o que é absurdo porque por (4.60) se tem $\frac{r^2}{2} \geq 3$. Logo α' tem necessariamente que se anular. E o resultado vem do caso anterior.

Fica assim provada a conjectura do recolapso para este caso. O estudo do caso em que $V(\varphi) \neq 0$ tem um mínimo não degenerado nulo fica para trabalho futuro.

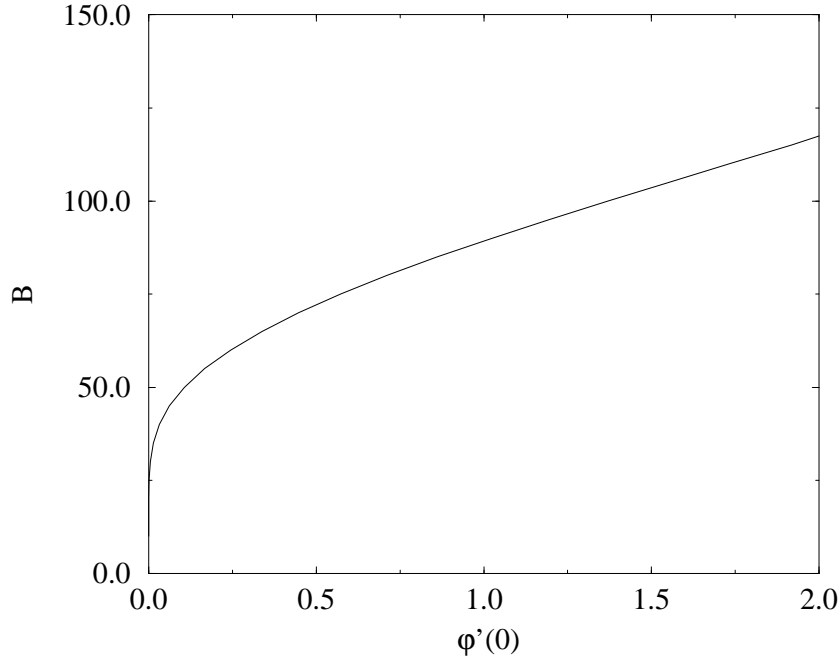


Figura 4.2: Fronteira da região admissível no espaço de parâmetros (região superior ao gráfico) para a restrição do número de “e-foldings” para o potencial de duplo-poço. Note-se que $0 \leq \varphi'_0 \leq 2$.

4.3.5 Inflação nas teorias escalares tensoriais

Recordem-se as equações gerais das teorias escalares tensoriais com γ arbitrário

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + a^{-3\gamma}M(\varphi) + V(\varphi) \quad (4.63)$$

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} = -a^{-3\gamma}M'(\varphi) - V'(\varphi). \quad (4.64)$$

Vai considerar-se apenas o potencial duplo poço com um mínimo nulo para $V(\varphi)$, visto que os resultados são completamente análogos no caso do potencial de Nambu-Goldstone, com o objectivo de generalizar a esta classe de teorias os resultados obtidos para a relatividade geral mais um campo escalar no Capítulo 3. Para resolver os problemas cosmológicos os modelos inflacionários têm, como se viu, que satisfazer as três condições [L⁺97] [FFO90]

1. *Suficiente inflação*: A restrição para o número de “e-foldings” fica agora usando (4.64)

$$N = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = - \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) + a^{-3\gamma}M(\varphi) \right]}{3\dot{\varphi}^2 + 3\gamma a^{-3\gamma}M(\varphi)} \geq 60 \quad (4.65)$$

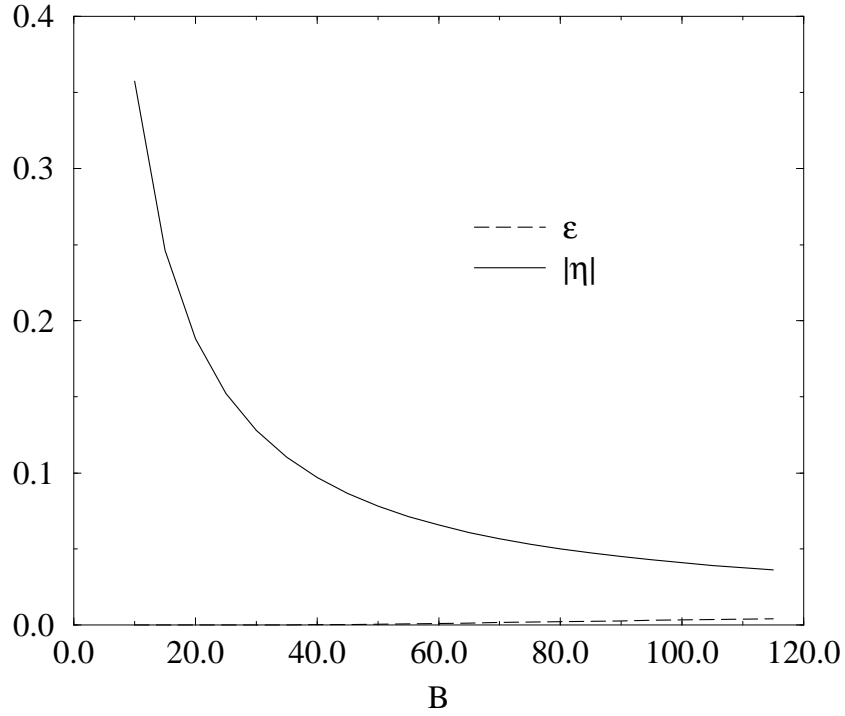


Figura 4.3: Parâmetros de “slow-roll” como função de B em $N = 30$ para o potencial de duplo-poço.

que só é invariante para a mudança da coordenada independente $t \rightarrow t' = \sqrt{A}t$ se $\gamma = \frac{4}{3}$. Para este valor de γ o número de “e-foldings” N fica

$$N = - \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) \right]}{3\dot{\varphi}^2} \geq 60 \quad (4.66)$$

porque o potencial $M(\varphi) = \mu$ é constante. (4.66) obtém-se directamente de (4.64) pondo $\gamma = 4/3$.

2. *Limites para a energia do campo:* (ver [L⁺97] e [FFO90] e referências incluídas) O regime de inflação ocorre na gama de energias entre m_{pl} e $10^{-17}m_{pl}$. Isto restringe a dinâmica no espaço de fase à região definida por

$$10^{-34}m_{pl}^2 \leq \frac{\dot{a}^2}{a^2} \leq m_{pl}^2. \quad (4.67)$$

O estudo das condições necessárias para que ocorra um período de inflação nas TET será feito apenas para a energia $\dot{a}_0/a_0 = m_{pl}$ ¹ que corresponde

¹No estudo numérico faz-se $m_{pl} = 1$

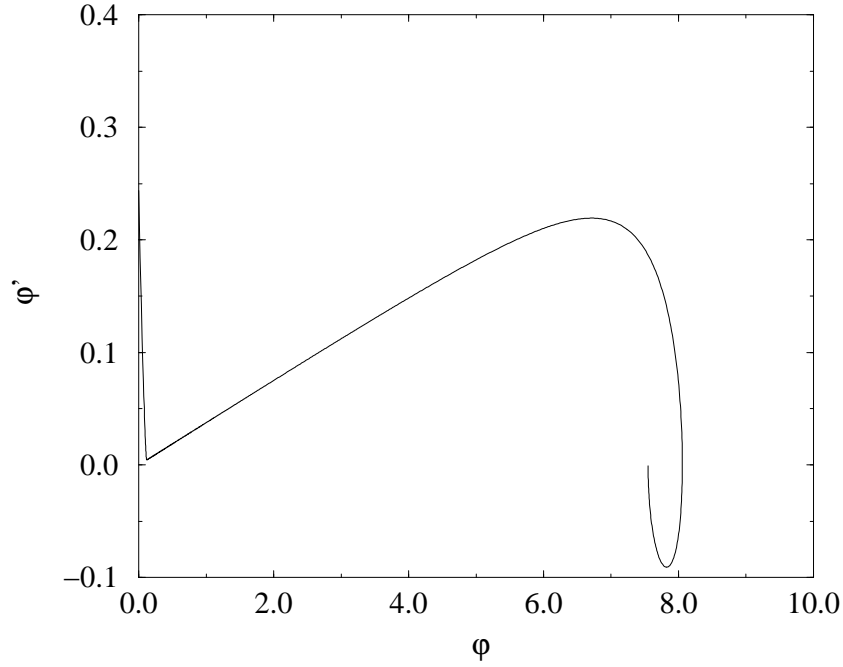


Figura 4.4: Órbita típica de “slow-roll” com $B = 60$ e $\mu = 1$ com condições iniciais $\frac{\dot{a}'}{a} = 1$, $\varphi_0 = 0$ e $\varphi'(0) = .243931$.

ao valor máximo de energia admitido por (4.67). Espera-se que o estudo para valores iniciais de $\dot{a}_0/a_0 \leq m_{pl}$ não seja qualitativamente diferente do primeiro caso. Note-se que, agora, as condições iniciais estão relacionadas através da integral primeira (4.63).

Para $\frac{\dot{a}_0}{a_0} = 1$ o valor da condição inicial $\dot{\varphi}_0$ está restringido ao intervalo $[0, 2]$.

3. *Perturbações escalares:* (ver [L⁺97] e [FFO90] e referências incluídas) A amplitude das perturbações escalares é de uma parte em 10^5 .

A amplitude das perturbações escalares continua a ter a forma anterior

$$(A.21) \quad [L^+97] \quad [MFB92] \quad \delta \simeq \frac{\dot{a}^2}{a^2 \dot{\varphi}}$$

desde que os parâmetros de “slow-roll” sejam constantes no tempo (ver apêndice A). Assim assumindo que ϵ e η satisfazem estas hipóteses o rescalamento de δ através da mudança de variável independente $t \rightarrow t' = \sqrt{A}t$ continua válido assim como os argumentos que se seguiram (ver Capítulo 3).

Em resumo, quando se compara este problema com o problema análogo considerado no Capítulo 2, vê-se que, embora haja uma diferença nas equações da dinâmica e na condição 2, no que diz respeito aos limites da variação da energia,

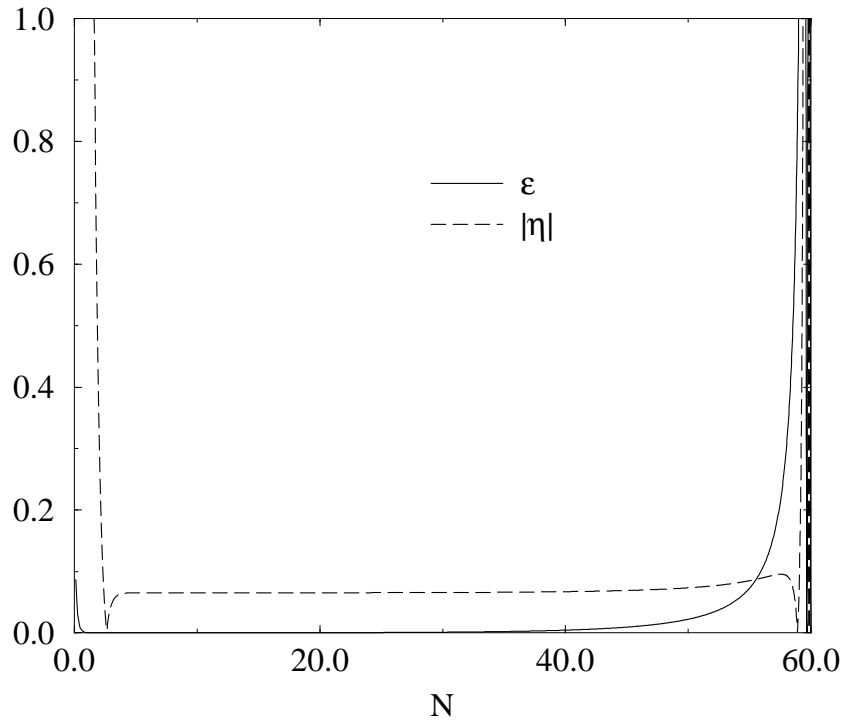


Figura 4.5: Parâmetros de “slow-roll” ao longo de uma órbita (ver Figura anterior).

que se reparte neste caso pelo factor de escala e pelo campo, a propriedade de rescalamento do número de “e-foldings” N , que é crucial para se poder reduzir a análise a apenas dois parâmetros, permanece válida desde que $\gamma = \frac{4}{3}$. Esta hipótese é fisicamente relevante para o estudo de inflação porque, às energias a que esta ocorre, pensa-se que toda a matéria se comporta essencialmente como radiação. Finalmente, tal como no caso da relatividade mais um campo escalar, a terceira restrição depende apenas da constância de ϵ e η ao longo do tempo e portanto, em particular, fica justificada se se obtiver o regime de “slow-roll”.

Os resultados obtidos, seguindo os mesmos passos da análise feita no Capítulo 3, estão representados nas Figuras (4.2) a (4.5) e corroboram a ideia de que para este tipo de potenciais inflação suficiente corresponde a órbitas com um longo período de “slow-roll”.

A Figura (4.2) mostra que a restrição (4.66) do número de “e-foldings” é satisfeita numa grande região do espaço de parâmetros. Verifica-se também que para esses valores dos parâmetros as quantidades ϵ e $|\eta|$, assim como as suas derivadas são muito menores do que 1 logo a aproximação de “slow-roll” é válida nesta região (ver Figuras (4.3), (4.4) e (4.5)). Portanto, não é possível satisfazer as restrições inflacionárias sem “slow-roll” e este regime é um ponto de partida sólido para os estudos de novos dados observacionais.

Capítulo 5

Conclusão

Apresentou-se nesta dissertação um estudo de modelos cosmológicos concretos usando métodos de análise qualitativa e resolução numérica de equações diferenciais ordinárias.

O estudo realizado permitiu determinar quais as condições necessárias para que ocorra um período de inflação nos modelos de FLRW em relatividade geral e nas teorias escalares tensoriais para o caso de radiação. Mostrou-se, e este é o resultado realmente novo desta dissertação, que não é possível satisfazer as restrições inflacionárias sem “slow-roll”. De facto os resultados numéricos do estudo global no espaço de parâmetros mostram que as órbitas de não “slow-roll” também não satisfazem a restrição do número de “e-foldings”. O regime de “slow-roll” é forçado pelas restrições observacionais no cenário geral de potenciais com vários extremos. Num quadro de um período finito de inflação a aproximação de “slow-roll” é um ponto de partida para o estudo das restrições de novos dados observacionais. No quadro complementar com constante cosmológica não nula, pela regularização das equações em torno de infinito, verificou-se que o comportamento assintótico do factor de escala é de de Sitter tanto em relatividade geral mais um campo escalar como nas teorias escalares tensoriais.

Sobre a convergência das teorias escalares tensoriais para a relatividade geral mostrou-se que a relatividade geral é um atrator no caso em que o campo escalar estiver sujeito a um potencial com um mínimo não degenerado. A prova assenta na construção de uma função de Liapunov associada ao ponto de equilíbrio no infinito que corresponde ao mínimo do potencial. No caso em que o conteúdo material é composto por radiação o argumento vale para qualquer condição inicial do factor de escala sobre um ramo de expansão enquanto para outros tipos de matéria o resultado vale para uma condição inicial do factor de escala suficientemente grande.

Identificou-se uma classe de teorias escalares tensoriais cujas equações são idênticas aos modelos de Bianchi com curvatura positiva não isotrópicos, apenas com dois graus de liberdade, e provou-se que neste caso, para os modelos de FLRW de curvatura positiva, recolapso é inevitável.

Para terminar, referem-se algumas questões que foram abordadas e em relação às quais não foi possível obter resultados no âmbito desta tese: a conjectura do recolapso para os os modelos de FLRW de curvatura positiva nas teorias escalares tensoriais para o vácuo com constante cosmológica nula, a equivalência entre as equações dos modelos de Bianchi da classe B da relatividade geral e as das teorias escalares tensoriais e a extensão desta analogia às teorias de gravitação de ordem superior cujo lagrangeano tem a forma

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ R + c_1 R^2 + c_2 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + c_3 R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \right\} \quad (5.1)$$

onde c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são constantes reais. Para todas estas classes de teorias espera-se poder provar que as equações são compostas por uma integral primeira

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} \dot{b}_i^2 + M(a, b_1, \dots, b_N) \quad (5.2)$$

e pelas equações de osciladores

$$\ddot{b}_i + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{b}_i = - \frac{\partial M}{\partial b_i}(a, b_1, \dots, b_N), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.3)$$

e a equação para o factor de escala que se obtém derivando (5.2) em ordem ao tempo e usando (5.3)

$$3 \frac{\ddot{a}}{a} = - \sum_{i=0}^N \dot{b}_i^2 + M(a, b_1, \dots, b_N) + \frac{a}{2} \frac{\partial M}{\partial a}(a, b_1, \dots, b_N). \quad (5.4)$$

Estes problemas serão o objecto de trabalho futuro.

Apêndice A

Perturbações escalares da métrica de FLRW

Assume-se que a métrica de FLRW não perturbada, em coordenadas isotrópicas, é igual a

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\mu dx^\nu &= -dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij}(\mathbf{x}) dx^i dx^j \\ &= a^2(\tau) (-d\tau^2 + \gamma_{ij}(\mathbf{x}) dx^i dx^j) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde τ , $\frac{d\tau}{dt} = a^{-1}$, é o tempo conforme,

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} \left\{ 1 + \frac{k}{4} [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2] \right\},$$

a curvatura $k = -1, 0, 1$ e $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Considere-se então uma perturbação da métrica $\delta g_{\mu\nu}$. Fica-se então com $g_{\mu\nu}(\tau, \mathbf{x}) = g_{\mu\nu}^{(0)}(\tau, \mathbf{x}) + \delta g_{\mu\nu}(\tau, \mathbf{x})$. Estas perturbações podem ser de três tipos [MFB92]: escalares, vectoriais e tensoriais. Numa aproximação linear todas estas perturbações evoluem de uma maneira independente. Considere-se apenas as perturbações escalares.

Existem quatro maneiras distintas pelas quais as quantidades escalares podem contribuir para $\delta g_{\mu\nu}$ [MFB92]: multiplicando γ_{ij} por uma função escalar, $D = D(\tau, \mathbf{x})$, ou através de uma derivada espacial de duas funções escalares $B = B(\tau, \mathbf{x})$ e $C = C(\tau, \mathbf{x})$ ou ainda redefinindo a escala de tempo com $A = A(\tau, \mathbf{x})$ tal que $d\tau = Ad\eta$. Ou seja

$$\delta g_{\mu\nu}^e = a^2(\tau) \begin{bmatrix} -A & B_{,i} \\ B_{,i} & D\gamma_{ij} + C_{,ij} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

No que segue vai-se considerar somente perturbações lineares escalares do caso $k = 0$.

A.1 Perturbações escalares da métrica de FLRW com $k = 0$ e um campo escalar

Considere-se então o modelo de FLRW de curvatura nula com um campo escalar e vazio [L⁺97] [MFB92]. As equações do movimento, no tempo τ , são

$$\begin{aligned} 3\frac{a'^2}{a^2} &= \frac{1}{2}\phi'^2 + a^2V(\phi) \\ \phi'' + 2\frac{a'}{a}\phi' + \frac{dV}{d\phi} &= 0. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Considere-se então uma perturbação escalar da métrica $\delta g_{\mu\nu}^e$ e uma perturbação do campo $\delta\phi$ tal que $\phi(\tau) = \phi^{(0)}(\tau) + \delta\phi(\tau)$, onde $\phi^{(0)}(\tau)$ é solução de (A.3). No estudo das perturbações da métrica é conveniente impor $A = 0$ e $B = 0$, $C = 0$ que corresponde a estudar as perturbações num referencial síncrono ($A = 0$ e $B = 0$) e longitudinal ($B = 0$ e $C = 0$). Logo as perturbações escalares da métrica ficam

$$\delta g_{\mu\nu}^e = a^2(\tau) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D\delta_{ij} \end{bmatrix}.$$

A quantidade relevante para o estudo das perturbações é, que expressa o afastamento da curvatura nula [MFB92],

$$\mathcal{K} = -D - \frac{a'}{a\phi^{(0)'}}\delta\phi \tag{A.4}$$

onde a e $\phi^{(0)}$ são soluções das equações não perturbadas (A.3). Definindo

$$u = a \left(\delta\phi + \frac{\phi^{(0)'}a}{a'}D \right) \tag{A.5}$$

e

$$z = -\frac{u}{\mathcal{K}} \tag{A.6}$$

é fácil ver que z é a penas uma função do tempo conforme τ e $z = \frac{a^2\phi^{(0)'}}{a'}$. O estudo das perturbações é feito com u e z . Uma vez obtido $u = u(\tau, \mathbf{x})$ e $z = z(\tau)$ a quantidade \mathcal{K} obtém-se de

$$\mathcal{K} = -\frac{u}{z}. \tag{A.7}$$

É possível obter as equações para u e z [MFB92] [L⁺97]

$$u''(\tau, \mathbf{x}) + \nabla^2 u(\tau, \mathbf{x}) - \frac{z''}{z}u(\tau, \mathbf{x}) = 0. \tag{A.8}$$

Fazendo a transformada de Fourier no espaço vem

$$u_k''(\tau) + \left[k^2 - \frac{z''}{z} \right] u_k(\tau) = 0. \quad (\text{A.9})$$

onde $\mathbf{k} = (k^1, k^2, k^3)$ é o vector de onda e $k = ((k^1)^2 + (k^2)^2 + (k^3)^2)^{1/2}$.

Repare-se que para processos físicos cujas escalas caracteristicas sejam $k \ll 1$, *i. e.*, menores do que o raio de Hubble $(aH)^{-1}$, onde $H = \frac{a'}{a^2}$, tem-se $\frac{u_k''}{u_k} = \frac{z''}{z}$ o que implica $u_k \propto z$. O objectivo deste calculo é obter soluções de (A.9) para $k \gg 1$, *i. e.*, considerar apenas processos físicos cujas escalas sejam maiores do que o raio de Hubble.

\mathcal{K} pode ser expresso, através da transformada de Fourier, por

$$\mathcal{K} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \delta_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (\text{A.10})$$

onde a amplitude das perturbações, para cada k , é, usando (A.7),

$$\delta_k = \sqrt{\frac{k^3}{2\pi^2}} \left| \frac{u_k}{z} \right|. \quad (\text{A.11})$$

Definindo os parâmetros de “slow-roll”, expressos no tempo τ , como

$$\epsilon(\tau) = \frac{\phi'^2}{\frac{1}{2}\phi'^2 + a^2V(\phi)} \quad (\text{A.12})$$

$$\eta(\tau) = -\frac{a\left(\frac{\phi'}{a}\right)'}{\frac{a'}{a}\phi'} \quad (\text{A.13})$$

vem [SL93]

$$\frac{z''}{z} = 2\frac{a'^2}{a^2} \left(1 + \epsilon - \frac{3}{2}\eta + \epsilon^2 - 2\epsilon\eta + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\frac{\epsilon'}{a'} - \frac{1}{2}\frac{\eta'}{a'} \right). \quad (\text{A.14})$$

Note-se que

$$\tau = \int \frac{dt}{a} = \int \frac{da}{a^2H} = -\frac{1}{aH} + \int \frac{\epsilon da}{a^2H}.$$

Se ϵ e η forem constantes no tempo vem da equação anterior

$$\tau = -\frac{1}{aH} \frac{1}{1-\epsilon} \quad (\text{A.15})$$

e a equação (A.14) simplifica-se obtendo-se, neste caso,

$$\frac{z''}{z} = \frac{1}{\tau^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \quad (\text{A.16})$$

onde

$$\nu = \frac{1 - \eta + \epsilon}{1 - \epsilon} + \frac{1}{2}. \quad (\text{A.17})$$

Portanto, usando (A.16), a equação (A.9) reduz-se á equação de Bessel

$$u_k'' + \left[k^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\tau^2} \right] u_k = 0. \quad (\text{A.18})$$

A solução de (A.18), com condições auto-adjuntas, é

$$u_k(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu+1/2)\pi/2} (-\tau)^{1/2} H_\nu^{(1)}(-k\tau) \quad (\text{A.19})$$

onde $H_\nu^{(1)}$ é a função de Hankel de primeira espécie de ordem ν . O comportamento assintótico da solução (A.19) para $k\tau \gg 1$ é [SL93]

$$u_k(\tau) = e^{i(\nu-1/2)\pi/2} 2^{\nu-3/2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{\sqrt{2k}} (-k\tau)^{-\nu+1/2}. \quad (\text{A.20})$$

Substituindo em (A.11) e voltando ao tempo t , substituindo $k = (aH)^{-1}$ no instante em que as perturbações cruzam o horizonte, obtém-se a expressão para a amplitude de perturbações escalares

$$\begin{aligned} \delta &= 2^{\nu-3/2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} (1 - \epsilon)^{\nu-1/2} \frac{\dot{a}^2}{2\pi|\dot{\phi}|}, \\ \delta &\simeq \frac{\dot{a}^2}{a^2|\dot{\phi}|}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Referências bibliográficas

- [BB88] A. B. Burd and J. D. Barrow. Inflationary models with exponential potentials. *Nucl. Phys.*, B308:929, 1988.
- [BD61] C. Brans and R. H. Dicke. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935, 1961.
- [BF97] R. L. Burden and J. D. Faires. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole Publishing Company, 1997.
- [Bil99] A. P. Billyard. The asymptotic behavior of cosmological models containing matter and scalar fields. (*gr-qc/9908067*), 1999.
- [Bog80] O. L. Bogoyavlensky. *Methods in the qualitative theory of dynamical systems in astrophysics and gas dynamics*. Springer-Verlag, 1980.
- [CL97] N. J. Cornish and J. J. Levin. The mixmaster universe is chaotic. *Phys. Rev. Lett.*, 78:998–1001, 1997.
- [CMN99] T. C. Charters, J. P. Mimoso, and A. Nunes. Slow-roll inflation without fine-tuning. *Phys. Lett. B*, 471, 1999.
- [D'I95] R. D'Inverno. *Introducing Einstein's relativity*. Clarendon Press, 1995.
- [Dir75] P. Dirac. *General theory of relativity*. John Wiley and Sons, 1975.
- [DN93a] T. Damour and K. Nordtvedt. General Relativity as a Cosmological Attractor of Tensor-Scalar theories. *Phy. Rev. Lett.*, 70(15):2217–2219, 1993.
- [DN93b] T. Damour and K. Nordtvedt. Tensor-Scalar Cosmological models and their relaxation toward general relativity. *Phy. Rev. D*, 48(8):3436–3450, 1993.
- [EBL⁺99] G. Efstathiou, S. L. Bridle, A. N. Lasenby, M. P. Hobson, and R. S. Ellis. Constraints on Ω_Λ and Ω_m from distant type 1A supernovae and cosmic microwave background anisotropies. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc. L47(astroph/9812226)*, 303, 1999.

- [FFO90] K. Freese, J. A. Frieman, and A. V. Olinto. Natural inflation with Pseudo Nambu-Goldstone bosons. *Phy. Rev. Lett*, 65(26):3233–3236, 1990.
- [Fri22] A. Friedmann. -. *Z. Phys.*, 10:377, 1922.
- [Gut81] A. L. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phy. Rev. D*, 23(2):347–356, 1981.
- [Hal87] J. J. Halliwell. Scalar fields in cosmology with an exponential potential. *Phys. Lett.*, B185:341, 1987.
- [HNW91] E. Hairer, S. P. Norset, and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations I*. Springer-Verlag, 1991.
- [HRLG98] S. Hancock, G. Rocha, A. N. Lasenby, and C. M. Gutierrez. Constraints on cosmological parameters from recent measurements of CMB anisotropy. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc. L1 (astro-ph/9708254)*, 294, 1998.
- [HS74] M. W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.
- [L⁺97] J. E. Lidsey et al. Reconstructing the inflaton potential: An overview. *Rev. Mod. Phys.*, 69:373, 1997.
- [Lem27] G. Lemaitre. -. *Ann. Soc. Sci., Bruxelles*, 47A:49, 1927.
- [Lin83] A. D. Linde. Chaotic inflation. *Phys. Lett.*, B129:177, 1983.
- [LL80] L. Landau and E. Lifshitz. *Teoria do campo*. Mir, 1980.
- [LM85] F. Lucchin and S. Matarrese. Power law inflation. *Phys. Rev.*, D32:1316, 1985.
- [LM98] A. R. Liddle and A. Mazumdar. Inflation during oscillations of the inflaton. *Phys. Rev. D*, (50):083508–1, 1998.
- [LPB94] R. A. Liddle, P. Persons, and J. D. Barrow. Formalizing the slow-roll approximation in inflation. *Phys. Rev. D*, 50:7222–7232, 1994.
- [LPPT75] A. P. Lightman, W. H. Press, R. H. Price, and S. A. Teukolsky. *Problem Book in Relativity and Gravitation*. Princeton University Press, 1975.
- [LS99] Andrew R. Liddle and Robert J. Scherrer. A classification of scalar field potentials with cosmological scaling solutions. *Phys. Rev.*, D59:023509, 1999.

- [LW89] Xue-Feng Lin and R. M. Wald. Proof of the closed-universe-recollapse conjecture for diagonal Bianchi type-IX cosmologies. *Phys. Rev. D*, 40(10):3286, 3280 1989.
- [Lyt93] H. D. Lyth. Introduction to cosmology. In *Lectures given at the Summer School in High Energy Physics and Cosmology*. ICTP (Trieste), 1993.
- [Mac79] M. MacCallum. The mathematics of anisotropic spatially-homogeneous cosmologies. In Springer-Verlag, editor, *Physics of the expanding Universe*, 1979.
- [ME88] M. S. Madsen and G. F. R. Ellis. The evolution of Ω in inflationary universes. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, 234:67–77, 1988.
- [MFB92] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger. Theory of cosmological perturbations. *Phys. Rep.*, 215(5-6):203–333, 1992.
- [MN98] J. P. Mimoso and A. M. Nunes. General relativity as a cosmological attractor of scalar- tensor gravity theories. *Phys. Lett.*, A248:325, 1998.
- [Mos58] J. Moser. On the generalization of a theorem of A. Liapounoff. *Comm. Pure Appl. Math.*, XI:257–271, 1958.
- [MOS98] G. A. Monerat, H. P. Oliveira, and I. D. Soares. Chaos in preinflationary Friedmann-Robertson-Walker Universes. *Phys. Rev. D*, 1998.
- [MTW73] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973.
- [OSS97] H. P. Oliveira, I. D. Soares, and T. J. Stuchi. Chaos in anisotropic preinflationary models. *Phys. Rev. D*, 56(2):730–740, 1997.
- [P+98] S. Perlmutter et al. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae. *Ap. J. (astro-ph/9812133)*, 1998.
- [Que98] L. Querella. Variational principles and cosmological models in higher-order gravity. 1998.
- [Rob35] H. Robertson. -. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15:822, 1935.
- [Rob95] C. Robinson. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*. CRC Press, 1995.
- [RS75] M. P. Ryan and L. C. Shepley. *Homogeneous relativistic cosmologies*. Princeton University Press, 1975.
- [SL93] E. D. Stewart and D. H. Lyth. A more accurate analytic calculation of the spectrum of cosmological perturbations produced during inflation. *Phys. Lett.*, 302:171–175, 1993.

- [TT99] M. S. Turner and J. A. Tyson. Cosmology at the millennium. *Rev. Mod. Phys.*, 71:S145, 1999.
- [Wal36] A. Walker. -. *Proc. London Math. Soc.*, 42:90, 1936.
- [Wal83] R. M. Wald. Asymptotic behaviour of homogeneous cosmological models un the presence of a positive cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 28(8):2118–2120, 1983.
- [Wal84] M. R. Wald. *General relativity*. The Universiry of Chicago Press, 1984.
- [WE97] J. Wainwright and G. Ellis. *Dynamical systems in cosmology*. Cambridge University Press, 1997.
- [Wei89] S. Weinberg. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23, 1989.